R
F 1509/T
46/47. 1984/1985.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1848
1988 -03- 30

SERIA TRANSPORTURI — AERONAVE

TOMUL XLVI — XLVII 1984 — 1985

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Academician *Radu Voinea*
MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Conf. dr. ing. *Cornel Berbente*; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R. S. România; Prof. dr. ing. *Ioan Carabogdan*; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific); Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. docent *Felicia Cornea*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. docent *Traian Demian*; Prof. dr. ing. *Gleb Dăgan*; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea*; Prof. dr. ing. *Juliela Florea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. dr. ing. *Moise Ienciu*; Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu*; Prof. dr. ing. *Adelaida Maleescu*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Prof. dr. ing. *Nicolae Murguleț*; Prof. dr. docent *Florea Oprea*; Prof. dr. ing, *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Prof. dr. ing. *Mircea Postelnicescu*; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș*; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca*; Prof. dr. ing. *George Rulea*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru*; Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. ing. *Voicu Tache*; Prof. dr. docent *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea*; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*.

Editor: Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through
ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378
Calea Griviței 62—64, Bucharest, ROMANIA

Sumar

N. Racoveanu
Sisteme diferențiale fracționare 8

M. Blumenfeld, A. Ioniță, Cristina Beldica
Separarea rădăcinilor ecuațiilor transcendente și polinomiale pe baza metodei funcțiilor de bordare (l. engleză) 17

Aurelia Popa
Asupra aplicării metodei variaționale în studiul difuziei 29

P. Stavre
Transformări de conexiune care conservă tensorul de curbură 34

Elisabeta Vasilescu, M. Toader, L. Raicu, Ileana Vasilescu, D. Bărăitaru, R. Tudose, Magda Olimpiu, M. Pelle
Metoda grafico-analitică de determinare a secțiunilor în elicoizi asistată de calculator . . . 41

D. Suciu
Grafuri etichetate și valori asociate acestora 52

V. Pimsner, V. Stanciu
Asupra metodei de simulare hidraulică a curgerilor compresibile unidimensionale, prin injecție cu apă 55

N. Racoveanu
Regulatorul în timp discret echivalent cu regulatorul în timp continuu 61

C. Berbente, S. Zanuc, V. Dobrin
Curgerea supersonică în jurul conului circular cu incidență 66

S. Găletuşe
Metode de optimizare a puterii elicilor eoliene cu ax orizontal 78

M. Radeş
O metodă de stabilire a existenței amortizării proporționale (l. engleză) 88

A. Stoicescu
Contribuții privind algoritmul și programul de calcul pentru determinarea consumului de combustibil al autovehiculelor cu transmisie hidromecanică 97

I. Cristea
Influența neuniformității transporturilor asupra numărului de mijloace de tracțiune locomotive) într-un sistem feroviar cunoscut 112

D. Rebuşapcă, C. Târcolea
Un model matematic aplicat în prognoza transporturilor 115

1509

ERDÉLYI MÚZEUM EGYESÜLET KÖNYVTÁRA 1869

M. Oprean
Profil de camă pentru mişcarea balistică a supapei de admisie la un motor cu aprindere prin scînteie corelat cu eficienţa economică şi cu limitarea emisiunilor nocive (l. engleză) 121

Şt. Staicu
Studiul mişcării mecanismelor cardanice prin metode matriceale 130

P. V. Marinescu
Studiul mişcării unui aterizor pneumatic neliniar 138

I. Stiharu, C. Bungetzianu, Carmen Alexe
Giroscopul acordat utilizat în sisteme inerţiale de navigaţie aeriană 146

V. Stanciu
Limitarea domeniului de funcţionare al reţelelor de palete deceleratoare 162

I. Sebeşan, Gh. Nichita
Influenţa dispozitivului „anticabraj" asupra variaţiei sarcinilor pe osiile locomotivelor cu referire la locomotiva C.F.R.060-EA de 5100 kW 172

A. Stoica
Minimizarea consumului de combustibil al avioanelor. Studiu de caz pentru avionul ROMBAC *1-11* 181

E. Ţurlea
Influenţa comenzilor servoasistate în calculul dinamic al suprafeţelor portante 190

Minela Badea
Diagnosticarea defectelor utilajelor industriale folosind măsurări de vibraţii 198

Sumar

N. Racoveanu
Fractional Differential Systems 8

M. Blumenfeld, A. Ioniță, Cristina Beldica
Root Separation of Transcendental and Polynominal Equation by the Bordering Function Method 17

Aurelia Popa
On the Application of Variational Method 29

P. Stavre
Connection Transformations which Conserve the Curvature Tensor 34

Elisabeta Vasilescu, M. Toader, L. Raicu, Ileana Vasilescu, D. Bărăitaru, R. Tudose, Magda Olimpiu, M. Pelle
Computer Aided Graphical and Analytical Method of Determining Helicoid Sections . . 41

D. Suciu
Labeled Graphs and Values Associated to Them 52

V. Pimsner, V. Stanciu
On a Method of Hydraulic Simulation of Unidimensional Compressible Flows, by Means of Water Injection 55

N. Racoveanu
A Discrete Time-Regulator Equivalent to a Continuous-Time Regulator 61

C. Berbente, S. Zancu, V. Dobrin
Supersonic Motion around the Circular Cone at Angle of Attack 66

S. Găletuşe
Method for Optimum Power of Windmill with Horizontal-Axis 78

M. Radeş
A Technique for Assessing the Existence of Proportional Damping 88

A. Stoicescu
Contribution to the Algorithm and FORTRAN-Program for Prediction of the Fuel Consumption of the Motor Vehicle with Hydromechanical Transmission 97

I. Cristea
The Influence of Carriage Ununiformity in the Number of Locomotives in a Known Railway System 112

D. Rebuşapcă, C. Târcolea
A Mathematical Model Applied to Transport Prognosis 115

M. Oprean
The Characteristics of a Cam Profile for the Ballistic Motion of the Inlet Valve in a Spark Ignition Engine, Related to Increasing the Fuel Economy and Decreasing the Exhaust Emission 121

Ş t. Staicu
The Study of Cardanic Mechanisms by Matrix Methods 130

P V. Marinescu
Nonlinear Pneumatic Landing Systems 138

I. Stiharu. C. Bungetzianu, Carmen Alexe
The Dry-Tuned Gyro in Strap Down Navigation Systems 146

V. Stanciu
Limitation of Functioning Domain of Blades Networks 162

I. Sebeşan, Gh. Nichita
Influence of the „anticabrage" Device upon the Load Variations on the Locomotive Axes with Reference to 060-FA 5100 kW CFR Locomotive 172

A. Stoica
The Fuel Minimisation for Aircraft. Simulation for the Aircraft ROMBAC *1—11* 181

E. Ţurlea
The Influence of Power Control Systems on the Dynamics of Lifting Surfaces 190

Minela Badea
Faults' Diagnosis of Industrial Machinery Using Vibration Measurements 198

SCIENTIFIC RESEARCH IN THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF BUCHAREST

With its 26.500 undergraduates and Ph.D students, as well as 1 500 teaching staff working in 12 faculties and 55 departments, the Polytechnic Institute of Bucharest has always been the largest higher education institution in Romania. In fact, from the first engineering courses taught in Romanian, organized in 1818 by the scholar Gheorghe Lazăr, the long succession of engineering schools and of their graduates has only confirmed the technical capacity and inclination of our country and its capital. The distance covered from the former National School of Bridges and Roads, which celebrated its centenary in 1981, to the present day citadel, can be viewed as the ascending line joining aspiration to fulfilment. The admiration for their brilliant forerunners is a strong incentive to present day disciples to rise to the challenge of the contemporary technical and scientific revolution.

The novel, revolutionary principle of the integration of education with research and production, worked out by Comrade Nicolae Ceaușescu, the president of our country, underlies the whole process of education and training our students for work, through work.

The necessary blending of scientific creation and industrial production in the education and training of engineers has been generalized notionwide, in keeping with the provisions of the laws in force at present. A wide spectrum training of specialist enables them to cope with the problems raised every day by the information explosion and the spectacular changes in the national economy. Thus, in the last few years only, new educational structures have been set up directly in response to the demands made by industry. This has resulted in the emergence of new lines of specialization such as : production of coke and coal products special purpose metallurgical products, robotics, biochemistry, chemical equipment and engineering, welding technology and equipment, etc.

Professors and students are directly involved together with specialists from research and industry in the solution of highly important problems such as : mechanization and automation of operations in hot sections, widening of the range of materials used in microelectronics, nuclear power engineering and aeronautics, development of high performance machines, of control and computer equipment, of industrial robots etc.

The main targets of research, as well as of design and microproduction activities in different engineering fields focus on topics put forward by our economy, which require the setting up of joint teams of specialists from different fields, who will follow up the respective project until it is actually applied in industry. The Polytechnic teaching staff and students have worked on many such important projects, for example: integrated circuit grids, aluminium and gold wire drawing technologies, high speed steels with low contents of expensive or scarce elements, titan and zirconium alloys used in nuclear power engineering, technologies used to obtain high purity chemical

compounds, the study of the processes involved in starting synchronous motors driving turbocompressors, the reduction of energy consumption in pumping stations used for irrigations of hydrotransport in mines, control systems for industrial robots, new technologies for electronic components and devices, techniques to eliminate hydrocarbon addition by coal gasification used to sustain combustion in burning bituminous schists, design of special machine-tools, new technologies and modulated devices for high quality processing and testing, high performance farming equipment, production of synthetic elastomers by open ring polymerization of cyclopentadiene, microcomputers, microwave digital relays, interactive graphical systems for computer aided design, etc.

In embarking upon the solution of high priority projects required by the national economy, research teams start from the topics included in the national plan for scientific research, technological development and the implementation of technical and scientific progress, coordinated by the National Council for Science and Technology, led by academician Elena Ceaușescu, BSc, PhD, vice-prime minister of the government and brilliant, world famous scientist. At the same time, long term fundamental research is encouraged in order to carry on and develop lines of research already pursued in our institute for a long time.

The Polytechnic Institute has greatly contributed to industrial development through research and the design of computing equipment, of different devices and installations. But of the various products being manufactured at present or just taken over by industry mention can be made of traffic monitoring equipment, M 18, M 118 and M 216 microcomputers, AMIC and Personal microcomputers, equipment for psychotechnical investigations, complex installations for poultry batteries, the DIALISP artificial intelligence machine, the DELTA microwave digital relay and many others. Of significant importance is the design and construction of an automatic line for chill casting, of test stands, sugar diffusion installations, technological aggregates, industrial robots, dimensional control devices, measuring and control equipment, etc.

The Polytechnic Institute is the organizer of a large number of national and international scientific meetings, a few of the most recent being The National Conference on Power Engineering, The Vth National Conference on Industrial Automatic and Information Systems, The 3rd Symposium on Microwave Technology, The 2nd Colloquium on Water Treatment Equipment, The Symposium on Electrical Machines Associated with Static Converters, The Vth National Conference on Machine-Tools, The IIIrd National Conference on Precision Mechanics, The National Conference on Chemistry and Chemical Engineering, The IIIrd National Symposium on Industrial Robots.

In the last three years, 110 teaching staff and 60 foreign citizens have been awarded doctoral degrees in the Polytechnic, in one of the 50 specialities listed for this degree.

By dealing with a wide range of problems, the scientific work carried on in the Polytechnic is an active factor in the promotion of scientific progress in our country. The importance of the part played by our teaching staff in the solution of research projects stemming from economic requirements is reflected in the 600 contract-based projects completed in 1984 alone.

The Polytechnic Bulletin is published yearly in 9 different issues: Electrical Engineering, Electronics, Control Engineering and Computers, Power Engineering, Mechanics, Machine Construction, Transport-Aerospace Engineering, Chemistry, Metallurgy, which are a sequel to the old periodicals: "Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", "Bulletin of the Polytechnic of Bucharest" and "Bulletin of the Gheorghe Gheorghiu-Dej Polytechnic of Bucharest". Among the contributors to the first issue in 1929 are Dan Barbilian, Elie Carafoli, Grigore Moisil, Octav Onicescu, Dimitrie Pompeiu, Gheorghe Ţiţeica, C. Vasilescu-Karpen.

The materials published in the Bulletin derive, first of all, from the results of the research carried out by the teaching staff of the Polytechnic, in collaboration with specialists from research institutes, from industry or from different scientific institutions. The students research papers are published side by side with those of their professors or of foreign academics. Complete collections of the Bulletin of the Polytechnic Institute of Bucharest exist both in our country and in well known foreign institutions, which testifies to the interest it anrises at home and abroad. It is our hope that this interest will continue to grow in the future.

prof. Voicu Tache, MSc. Ph. D
Rector of the Polytechnic Institute of Bucharest

C.Z.: 629.7 :517.958

SISTEME DIFERENȚIALE FRACȚIONARE

N. RACOVEANU *

Operatorul de derivare fracționară Riemann-Liouville are proprietăți interesante. Unele rezultate noi pot fi obținute prin considerarea acestui operator în D'_+ și aplicarea lui la ecuații diferențiale și la sisteme diferențiale. De exemplu seria matricială $E(A,\ t,\ \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$ pentru $\alpha = 1$ coincide cu e^{At} și este utilă în problema Cauchy cu condiții inițiale. Calculele în modulul $(D'_+, +, *)$ permit introducerea valorilor proprii și rezolventei, utilizînd metode elementare. Sînt prezentate și alte aplicații posibile.

Derivata de un ordin oarecare, fracționar, a fost introdusă și dezvoltată de Leibnitz, Riemann, Liouville, Heaviside și alții. Deși apare mult mai rar în aplicații decît derivata de ordin întreg, studiul derivatei fracționare prezintă interes mai ales în spațiul distribuțiilor cu suport pozitiv D'_+.

Un exemplu clasic în care apare derivata de ordin 1/2 este următorul: considerăm un cablu electric caracterizat prin R și C pe unitatea de lungime. Ecuațiile care descriu tensiunea și curentul sînt:

$$-\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = Ri(x, t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = C\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

Eliminînd pe i se obține

$$\frac{\delta^2 u}{\partial x^2} = RC\frac{\partial u}{\partial t}; \qquad RC = \tau$$

Aplicînd transformata Laplace prin raport cu t rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} Lu = \tau s\, Lu$$

cu soluția:

$$Lu = Ae^{-x\sqrt{\tau s}} + Be^{x\sqrt{\tau s}}$$

* Prof. dr. ing., catedra Aeronave

Aceeași ecuație apare în problema propagării căldurii sau în procese de difuzie. În soluție a apărut $s^{1/2}$,care reprezintă imaginea operatorului de derivare de ordin 1/2 :

$$L^{-1}s^{1/2} = \delta^{1/2} = h\frac{t^{-3/2}}{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

unde $\Gamma(\alpha)$ este funcția factorială de argument real α. Transformata Laplace

$$L\left(h\frac{t^{-(1+\alpha)}}{\Gamma(-\alpha)}\right) = s^{\alpha}; \qquad \delta^{\alpha} = \underset{\alpha\in R}{h}\frac{t^{-(1+\alpha)}}{\Gamma(-\alpha)} \tag{1}$$

pentru $s = \sigma + i\omega(\sigma, \omega \in R)$ admite abscisa de convergență $\sigma > 0$; se alege acea determinare pentru care $s^{\alpha} > 0$ cînd $s \in R$.

(1) este cunoscut și ca operatorul Riemann-Liouville.

În lucrarea de față ne propunem o analiză a acestui operator în D'_+[1], precum și aplicarea acestui operator la sistemele diferențiale. Ca mai sus, notăm cu δ distribuția lui Dirac cu suportul în $t = 0$ și cu δ^{α} derivata ($\alpha > 0$), respectiv primitiva ($\alpha < 0$) lui δ, unde α este citit ca „putere" în sensul convoluției. Avem deci :

$$\delta^{\alpha} * \delta^{\beta} = \delta^{\alpha+\beta}; \qquad \alpha, \beta \in R$$

De asemenea $\delta^{\alpha} * \delta^{-\alpha} = \delta^{0} = \delta$
Ținînd seama de faptul că $L^{-1}s^{\alpha} = \delta^{\alpha}$
avem :

$$\delta^{\alpha} = h\frac{t^{-(1+\alpha)}}{\Gamma(-\alpha)}; \quad \alpha \in R$$

Să luăm cîteva exemple :

1. — $\alpha \to 0$ $\qquad \delta = \dfrac{h}{t\Gamma(0)}$

Pentru $t \neq 0$ și $\alpha \to 0$ se obține funcția identic nulă, deoarece $\Gamma(0)$ are o discontinuitate $\pm\infty$. Pentru $\alpha \to 0$ se obține un șir reprezentativ Dirac. În general pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$ avem

$$L\left(h\frac{t^{-(n+1)}}{\Gamma(-n)}\right) = S^{n}$$

și deci

$$L^{-1}s^{n} = \delta^{n}$$

Pentru $\alpha \notin Z$ (α nu este întreg) și pentru $1 + \alpha > 0$
avem

$$\delta^{\alpha} = h\frac{1}{t^{1+\alpha}\Gamma(-\alpha)}$$

Funcţionala generată de această funcţie este

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{1+\alpha}\Gamma(-\alpha)}\,dt; \qquad \Gamma(-\alpha) < \infty; \quad t \geqslant 0$$

dar integrala este divergentă, prin urmare nu defineşte o distribuţie. Totuşi este posibilă regularizarea acestei integrale divergente ; să considerăm funcţionala [2]:

$$< D\frac{1}{t^{1+\alpha}},\ \varphi > = < \frac{1}{t^{1+\alpha}},\ -\varphi' > = -\int_0^\infty \frac{\varphi'(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi'(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt$$

Integrînd prin părţi se obţine

$$< D\frac{1}{t^{1+\alpha}},\ \varphi > = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(t)+C}{t^{1+\alpha}}\Big|_0^\infty + (1+\alpha)\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(t)+C}{t^{2+\alpha}}\,dt\right]$$

Dacă alegem $C = -\varphi(0)$ rezultă

$$< D\frac{1}{t^{1+\alpha}},\ \varphi > = (1+\alpha)\int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi\cos}{t^{2+\alpha}}\,dt$$

şi funcţionala are sens. Prin recurenţă, acelaşi procedeu poate fi aplicat pentru orice $1+\alpha > 0$, $\alpha \notin Z$. În general, ca regulă, pentru funcţionale de această formă se înlocuieşte $\varphi(t)$ prin $\varphi(t) - \varphi(0)$, ceea ce asigură convergenţa integralei. Se utilizează notaţiile clasice, de exemplu

$$< hP\frac{1}{t},\ \varphi(t) > = V_p\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,dt$$

astfel încît regularizanta coincide cu partea finită (valoarea principală Cauchy) pentru $t > 0$ sau pentru $\varphi(t)$ care nu conţin punctul $t = 0$

În concluzie, pentru α întreg şi pozitiv apar derivatele lui δ(distribuţii singulare) iar pentru derivatele neîntregi şi de ordin mai mare ca -1 apar funcţionale care se regularizează prin partea finită.

2. — $\alpha = -1$; $\delta^{-1} = h\dfrac{1}{\Gamma(1)} = h$

Într-adevăr, în D'_+ primitiva lui δ este unică (treapta Heaviside).

3. — $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad \delta^{-\frac{1}{2}} = h\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$; $\qquad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

4. Pentru $n \in N \setminus 0$ avem

$$\delta^{-n} = h \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} = h \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

5. În fizica matematică se consideră „normale" ecuațiile care au soluție, soluția este unică și este „„continuă" prin raport cu datele problemei (condiții inițiale, la limită, etc.). De exemplu ecuația :

$$\dot{x} = x^a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a < 1$$

cu condiția inițială $x(0) = 0$ admite soluțiile

$$x = 0; \quad x = [(1-a)t]^{1/(1-a)}; \quad a < 1$$

Așadar această ecuație nu este normală; într-adevăr, în punctul (0,0) această ecuație nu verifică condițiile lui Lipschitz.

Se știe că dacă se dă o soluție particulară a unei ecuații diferențiale, pot fi construite alte ecuații care admit acea soluție particulară. În cazul unei bifurcații prezintă interes și normalizarea ecuației pentru acea soluție particulară. De exemplu ecuația (în D'_+) :

$$\delta^\alpha * y = bh \qquad b \in \mathbb{R}$$

este normală deoarece admite soluția unică

$$y = \delta_*^{-\alpha} b \delta^{-1} = b\delta^{-(1+\alpha)} = \frac{bh}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha$$

Dacă punem $\alpha = 1/(1-a)$ și $b = (1-a)^{1/(1-a)} \Gamma(1+\alpha)$, atunci această soluție coincide cu cea a ecuației precedente, dar ecuația a devenit normală.

* * *

Să introducem acum noțiunea de „sistem diferențial fracționar"; considerăm în D'_+ ecuația

$$\delta^\alpha * x = Ax + v$$

unde x este starea, v comanda generalizată, iar A o matrice reală n, n. Atunci avem și

$$(\delta^\alpha I - \delta A) * x = v \text{ de unde}$$

$$x = (\delta^\alpha I - \delta A)^{-1} * v$$

Calculul inversei se obține prin împărțire convolutivă

$$(\delta^\alpha I - \delta A)^{-1} = \delta^{-\alpha} I + \delta^{-2\alpha} A + \delta^{-3\alpha} A^2 + \ldots = h \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} \frac{t^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)}$$

Se observă imediat că pentru $\alpha = 1$ obținem

$$h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} = he^{At}$$

adică rezolventa pentru sisteme de ordinul întîi. Aşadar :

$$x = \left[h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)} \right] * v$$

Introducem seria matricială

$$E(A, t, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^{\alpha})^k}{\Gamma(1 + k\alpha)} \tag{2}$$

şi o comparăm termen cu termen cu seria

$$e^{At^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^{\alpha})^k}{k!}$$

Într-adevăr, pentru $\alpha \geqslant 1$ avem

$$\left\| \frac{(At^{\alpha})^k}{\Gamma(1 + k\alpha)} \right\| \leqslant \left\| \frac{(At^{\alpha})^k}{k!} \right\|; \qquad \Gamma(1 + k^{\alpha}) \geqslant k!; \quad \alpha \geqslant 1$$

Aşadar $E(A, t, \alpha)$ este absolut convergentă.

Să punem acum problema Cauchy şi să calculăm soluţia pentru condiţii iniţiale date. Deoarece $\alpha \in \mathbb{R}$, alegerea condiţiilor iniţiale depinde de valoarea lui α. De exemplu, pentru $1 < \alpha \leqslant 2$ avem posibilitatea de a alege condiţii iniţiale arbitrare pentru derivata întîi pentru funcţia căutată. Procedeul este următorul : prelungim pe $x(t)$ astfel încît $x(t < 0) = 0$ Căutăm soluţia $x(t > 0)$ şi constatăm că apare un salt în origine $x_0 = x(+0)$ Derivata întîi poate avea şi ea un salt în origine astfel încît $\dot{x}_0 = \dot{x}(+0)$. Să luăm ca exemplu cazul în care numai x (t) are asalt în origine. Atunci, calculînd derivata în sens distribuţii avem $v = x_0 \delta^{\alpha-1}$ şi soluţia este

$$x = \left(\sum_{0}^{\infty} \delta^{-(k+1)\alpha} \right) * \delta^{\alpha-1} x_0 = \sum_{0}^{\infty} \delta^{-(k\alpha+1)} x_0.$$

Aşadar rezultă

$$x = h \sum_{0}^{\infty} \frac{(At^{\alpha})^k}{\Gamma(1 + k\alpha)} x_0 = hE(A, t, \alpha) x_0 \tag{3}$$

Soluţia verifică condiţia iniţială : $x(+0) = x_0$
Pentru α apropiat de 1 este utilă formula

$$hE(A, t, \alpha) = he^{At} * [I\delta + (\delta^{1-\alpha} - \delta)A * hE(A, t, \alpha)] \tag{4}$$

Se observă că pentru $\alpha = 1$ obţinem ca mai sus $E(A, t, 1) = e^{At}$. O altă formulă echivalentă este

$$hE(A, t, \alpha) = he^{At} * \left[I\delta + h \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{t^{(1+k)\alpha-1}}{\Gamma[(1 + k)\alpha]} - \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(1 + k\alpha)} \right) A^{k+1} \right] \tag{5}$$

Evaluarea diferenței din paranteză permite o apreciere a modului în care rezolventa se „depărtează" de he^{At}.

Principial, sursa instantanee de perturbație la $t = 0$ poate fi introdusă pentru funcție și derivatele de orice ordin pînă la α; aceasta face ca stabilitatea soluției să depindă de modul în care se aleg condițiile inițiale. Dacă numai funcția admite salt în origine atunci stabilitatea rezultă din comportarea pentru $t \to \infty$ a soluției (3). În acest caz sînt valabile definițiile uzuale pentru stabilitate, adică :

$$\lim_{t\to\infty} \| E(A, t, \alpha) \| = 0 \quad \text{asimptotic stabil.}$$

$$\lim_{t\to\infty} \| E(A, t, \alpha) \| < \infty \quad \text{stabil}$$

și instabil în cazul nemărginirii, oricare ar fi sursa instantanee de perturbații $x_0\delta^{\alpha-1}$.

* * *

Să considerăm acum următoarele exemple

$$\delta^{3/2} * x = \lambda x + x_0\delta^{1/2} \qquad x(+0) = x_0$$

$$x(+0) = 0$$

Soluția este

$$x = h \sum_0^\infty \frac{(\lambda t^{3/2})^k}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2}k\right)} x_0$$

și verifică condiția inițială. Pentru $\alpha = 2$ se poate verifica soluția cu cea cunoscută :

$$\delta^1 * x = \lambda x + x_0\delta' \qquad x(+0) = x_0$$

$$x(+0) = 0$$

$$x = h \sum_0^\infty \frac{(\lambda t^2)^k}{(2k)!} x_0 = h\left(1 + \frac{\lambda t^2}{2!} + \frac{(\lambda t^2)^2}{4!} + \frac{(\lambda t^2)^3}{6!} + \ldots\right) x_0 =$$

$$= \frac{1}{2} h(e^{\sqrt{\lambda}t} + e^{-\sqrt{\lambda}t}) x_0$$

* * *

O generalizare utilă în D'_+ a ecuației

$$(\delta_\alpha I - \delta A) * x = v \tag{6}$$

poate fi obținută dacă considerăm matrice pătrate de forma

$$\widetilde{A} = [a_{ij}\delta^{\alpha_{ij}}] \qquad a_{ij} \in \mathrm{R}\,; \qquad \alpha_{ij} \in \mathrm{R}$$

și sisteme de forma

$$\tilde{A} * x = v; \qquad \det \tilde{A} \neq 0 \tag{7}$$

Din faptul că $(D'_+, +, *)$ nu are divizori ai lui zero, rezultă unicitatea soluției ecuației (7). Reținînd structura de modul, are sens calcularea determinantului matricei $\tilde{A}$, în algebra $('_+D, +, *)$. Atunci dacă $\det \tilde{A} \neq 0$ soluția rezultă imediat :

$$x = \tilde{A}^{-1} * v$$

Pe de altă parte are sens calculul spectrului lui $\tilde{A}$ dat de

$$\det (\lambda I - \tilde{A}) = 0$$

unde $\lambda \in D'_+$ sînt valori proprii. Rezolventa este dată de valorile lui λ pentru care operatorul

$$(\lambda I - \tilde{A})$$

nu este inversabil. Apar astfel „modurile" sistemului (7). De exemplu, un integrator cu intrarea u și ieșirea x este descris de

$$u = \dot{x}$$

Să punem acum condiția ca potențialele de la borne să fie zero pentru $t < 0$ iar la $t = 0$ să apară la ieșire condiția necesară pentru realizarea lui $x(+0) = x_0$. Acest mod descrie mai bine realitatea, deoarece condensatorul care se încarcă pentru realizarea condiției inițiale este conectat brusc la bornele integratorului în momentul în care începe integrarea ($t = 0$). Atunci :

$$u(t < 0) = 0$$

$$x(t < 0) = 0$$

$$x(+0) = x_0$$

Derivata în sens distribuții ne dă

$$\delta' * x = \dot{x} + x_0 \delta$$

Prin urmare integratorul este descris complet prin :

$$\delta' * x = u + x_0 \delta$$

Să aplicăm acestea în cazul unui dublu integrator fracționar :

$$\begin{aligned} \delta^{\alpha} * x_1 &= u + x_{10} \delta^{\alpha-1} \\ \delta^{\beta} * x_2 &= x_1 + x_{20} \delta^{\beta-1} \end{aligned} \tag{8}$$

Punem aceste ecuații în forma (7) :

$$\begin{bmatrix} \delta^{\alpha} & 0 \\ -\delta & \delta^{\beta} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + x_{10} \delta^{\alpha-1} \\ x_{20} \delta^{\beta-1} \end{bmatrix} = v$$

Avem imediat $Sp\,\widetilde{A} = \{\delta^{\alpha}, \delta^{\beta}\}$
Așadar rezultă modurile $\{\delta^{-\alpha}, \delta^{-\beta}\}$
Mai departe obținem :

$$\widetilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \delta^{-\alpha} & 0 \\ \delta^{-(\alpha+\beta)} & \delta^{-\beta} \end{bmatrix}$$

și deci soluția este

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \delta^{-\alpha} * u + x_{10}\delta^{-1} \\ \delta^{-(\alpha+\beta)} * u + x_{10}\delta^{-\beta-1} + x_{20}\delta^{-1} \end{matrix}\Bigg]$$

Soluția verifică condițiile inițiale date

$$x_1(+0) = x_{10}$$
$$x_2(+0) = x_{20}$$

O verificare se obține punînd $\alpha = \beta = 1$ și rezultă

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h * u + x_{10}h \\ ht * u + x_{10}ht + x_{20}h \end{bmatrix}$$

adică soluția pentru dublul integrator uzual. Menționăm că (8) descrie și un dublu derivator; într-adevăr, penru $\alpha = \beta = -1$ rezultă

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta' * u + x_{10}\delta^{-1} \\ \delta'' * u + x_{10}\delta + x_{20}\delta^{-1} \end{bmatrix}$$

Derivarea fiind considerată în sens distribuții, condițiile inițiale apar explicit, dar trebuie interpretate pentru problema pusă.

* * *

Să formulăm acum problema controlabilității pentru sisteme de forma (7). Explicităm comanda generalizată

$$v = \widetilde{B} * u + \widetilde{x}_0$$

considerate în D'_+. Atunci (7) devine

$$\widetilde{A} * x = \widetilde{B} * u + \widetilde{x}_0$$

Se pune problema existenței comenzii u care aduce sistemul în zero pe un interval deschis $T \subset R_+$ (controlabilitate), respectiv aducerea din zero la o stare dată pe T (accesibilitate). Condiția poate fi exprimată direct astfel : se cere ca ecuația (9) să admită cel puțin o soluție în u, pentru x_0 arbitrar, cînd se dă starea x_T. Din acest enunț rezultă direct că

$$x_T \to u$$

trebuie să fie epimorfism; toate criteriile de controlabilitate (accesibilitate) sîne echivalente în acest sens.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. S. Vladimirov*, Ecuaţiile fizicii matematice, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.
2. *I. M. Ghelfand, G. E. Silov*, Funcţii generalizate. Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti. 1983.

Fractional Differential Systems

The Riemann-Liouville fractional derivative operator has interesting properties. Some new results can be derived, considering this operator in D'_+ and applying it to differential equations and to differential systems. As an example the matrix serial $E(A, t, \alpha)= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^{\alpha})^k}{\Gamma(1 + k\alpha)}$ — for $\alpha = 1$ coincides to e^{At} and it is useful for initial conditions Cauchy problem.

The computations in $(D'_+, +, *)$-module allow us to introduce eigenvalues and resolvents using elementary methods. Some other possible applications are presented.

C.Z: 517.954

ROOT SEPARATION OF TRANSCENDENTAL AND POLYNOMIAL EQUATION BY THE BORDERING FUNCTION METHOD

M. BLUMENFELD, A. IONIȚĂ, CRISTINA BELDICA *

Any function $y(x)$ can be replaced, on intervals on which the third derivative does not change its sign, by two parabolas which border — above and below — the given function. Consequently, the roots of any kind of equation (transcendental or polynomial, continuous or discontinuous) may be separated by studying the two bordering parabolas. The program, based on this idea, has been succesfully tested on some non-trivial functions (e.g. transcendental and discontinuous). The first derivative of the function is required.

1. Introduction

It has been shown [1], [2], [3] that any function $y(x)$ may be replaced, on intervals on which the third derivative does not change the sign, by two bordering parabolas Φ_α and Φ_β (Fig. 1), so as $\Phi_\alpha - y \geqslant 0$ and $\Phi_\beta - y \leqslant 0$ on the given $[a, b]$ interval. The roots separation method **) presented here, replaces the study of the function $y(x) = 0$ at discrete (usually equally spaced) points, by the analysis of the bordering functions

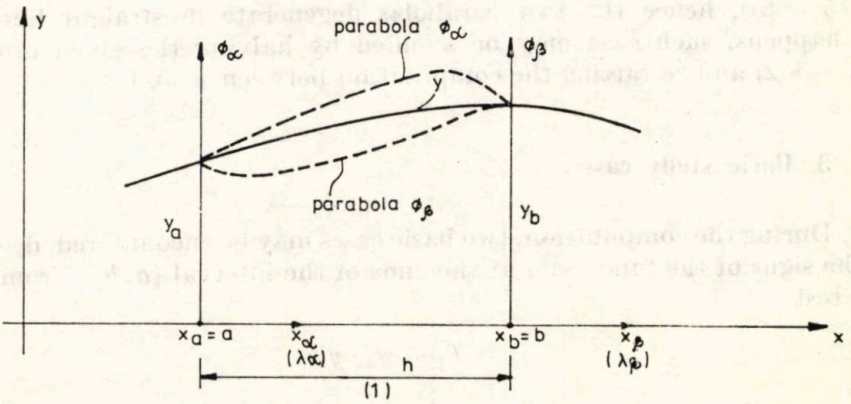


Fig. 1

* Prof. Ph. D.; Eng.; Eng., Strength of Materials Chair
** Finding intervals on which there is one, and only one root

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 CENTRÁLIS KÖNYVTÁRA

on intervals with variable length, which — on smooth zones — may have large values.

The function may be transcendental or polynomial, having also discontinuities and multiple roots. The first derivative of the given function has to be known.

Based on the relations and tests given below, a program in FORTRAN language has been written.

2. Basic relations

The basic relations being elementary, are given in Table 1, without any development. The relations mentioned below, which include α or β may be found in this table. We emphasize only some special features.

a) Three coordinate systems are used (Fig. 1)

1. x, y — for the function y and its derivative
2. x_α, Φ_α — for the parabola Φ_α (eq. $(1 - \alpha)$)
3. x_β, Φ_β — for the parabola Φ_β (eq. $(1 - \beta)$)

b) The coefficients of the two parabolas are obtained by imposing the following conditions: the values of the given function y and of the two parabolas at the ends of the interval have to be the same [$(2 - \alpha)$, $3 - \alpha$) and $(2 - \beta), (3 - \beta)$, respectively]; as the third condition, the equality of the first derivative y' is imposed — in a for Φ_α and in b for Φ_β.

c) The relations $(8 - \alpha)$ and $(8 - \beta)$ are obtained by replacing the previously obtained coefficients in $(1 - \alpha)$ and $(1 - \beta)$; from the former relations one obtains a simplified form, by using the dimensionless abscissas $(11 - \alpha), (11 - \beta)$.

d) In some cases it is possible that $A_\alpha = 0$ (eq. $(5 - \alpha)$, and $A_\beta = 0$ (eq. $(5 - \beta)$), hence the two parabolas degenerate in straight lines. If this happens, such case may be avoided by halving the given interval ($h_{new} = h/2$) and restarting the computation between a and $b = a + h_{new}$.

3. Basic study cases

During the computation, two basic cases may be encountered, decided by the signs of the function y at the ends of the interval $[a, b]$. From the first test

$$T_1 = y_a \cdot y_b \qquad (1$$

it may result:

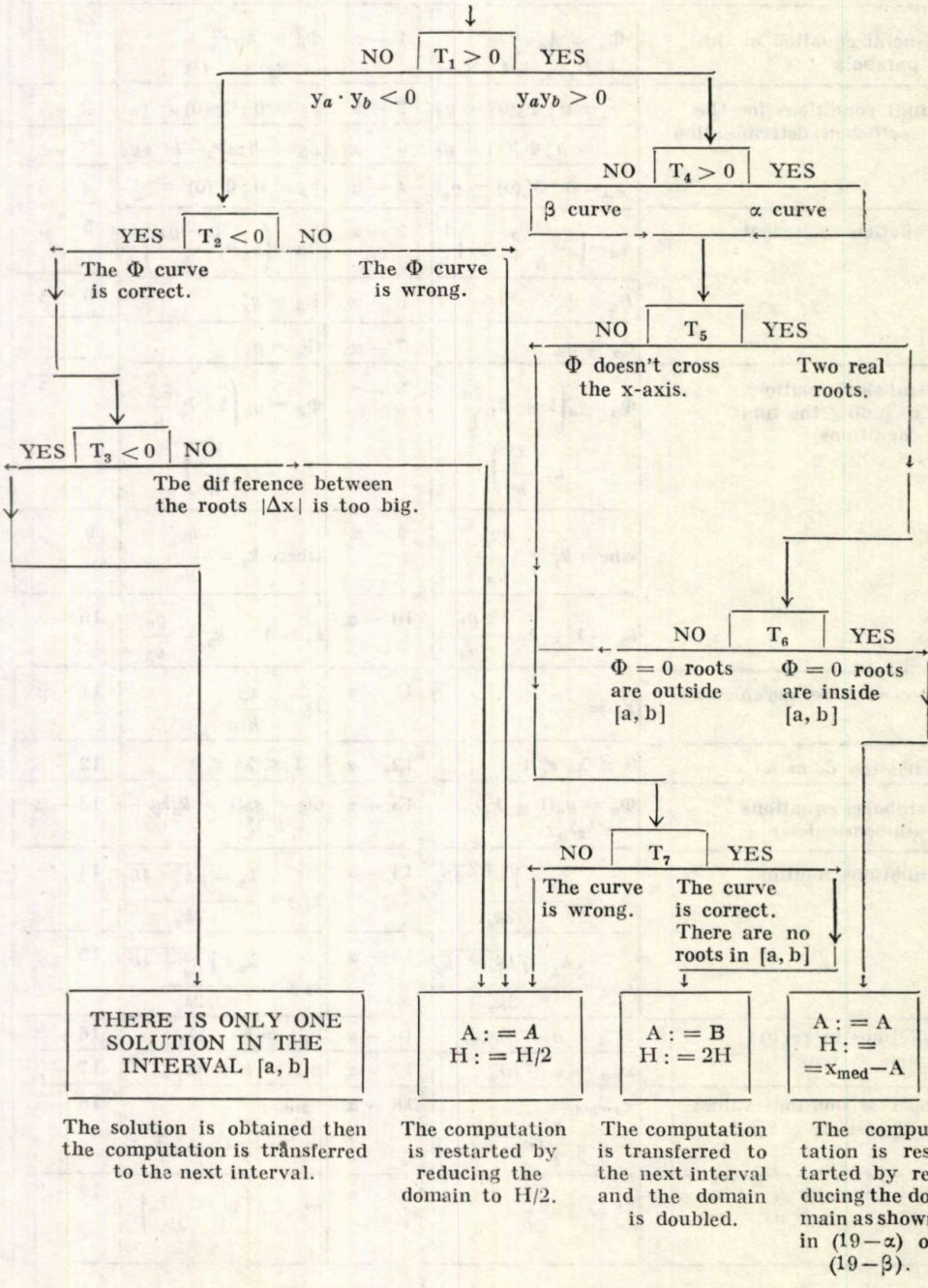
Case I: $T_1 < 0$, consequently y_a and y_b have opposite signs, *an odd number of solutions or a discontinuity* exist in the interval $[a, b]$.

Table 1

Curves	α		β	
Axis system	$x_\alpha - \Phi_\alpha$	Relation number	$x_\beta - \Phi_\beta$	Relation number
General equation of the parabola	$\Phi_\alpha = A_\alpha x_\alpha^2 + B_\alpha x_\alpha + C_\alpha$	$1-\alpha$	$\Phi_\beta = A_\beta x_\beta^2 + B_\beta x_\beta + C_\beta$	$1-\beta$
Limit conditions for the coefficient determination	$x_\alpha = 0\,;\ \Phi_\alpha(0) = y_a$	$2-\alpha$	$x_\beta = 0\,;\ \Phi_\beta(0) = y_b$	$2-\beta$
	$x_\alpha = h\,;\ \Phi_\alpha(h) = y_b$	$3-\alpha$	$x_\beta = -h\,;\ \Phi_\beta(-h) = y_a$	$3-\beta$
	$x_\alpha = 0\,;\ \Phi'_\alpha(0) = y'_a$	$4-\alpha$	$x_\beta = 0\,;\ \Phi'(0) = y'_b$	$4-\beta$
Equation coefficients	$A_\alpha = \left(\frac{y_b - y_a}{h} - y'_a\right)\frac{1}{h}$	$5-\alpha$	$A_\beta = \left(y'_b - \frac{y_b - y_a}{h}\right)\frac{1}{h}$	$5-\beta$
	$B_\alpha = y'_a$	$6-\alpha$	$B_\beta = y'_b$	$6-\beta$
	$C_\alpha = y_a$	$7-\alpha$	$C_\beta = y_b$	$7-\beta$
Parabolas equations including the limit conditions	$\Phi_\alpha = y_a\left(1 + k_1\frac{x_\alpha}{h} - k_2\frac{x_\alpha^2}{h^2}\right)$	$8-\alpha$	$\Phi_\beta = y_b\left(1 + k_3\frac{x_\beta}{h} - k_4\frac{x_\beta^2}{h^2}\right)$	$8-\beta$
	where $k_1 = \frac{hy'_a}{y_a}$	$9-\alpha$	where $k_3 = \frac{hy'_b}{y_b}$	$9-\beta$
	$k_2 = 1 + k_1 - \frac{y_b}{y_a}$	$10-\alpha$	$k_4 = 1 - k_3 - \frac{y_a}{y_b}$	$10-\beta$
Dimensionless parameter	$\lambda_\alpha = \frac{x_\alpha}{h}$	$11-\alpha$	$\lambda_\beta = \frac{x_\beta}{h}$	$11-\beta$
Variation domain	$0 \leqslant \lambda_\alpha \leqslant 1$	$12-\alpha$	$-1 \leqslant \lambda_\beta \leqslant 0$	$12-\beta$
Parabolas equations (dimensionless)	$\Phi_\alpha = y_a(1 + k_1\lambda_\alpha - k_2\lambda_\alpha^2)$	$13-\alpha$	$\Phi_\beta = y_b(1 + k_3\lambda_\beta - k_4\lambda_\beta^2)$	$13-\beta$
Equations solutions	$\lambda_{1,\alpha} = \frac{k_1 + \sqrt{k_1^2+4k_2}}{2k_2}$	$14-\alpha$	$\lambda_{1,\beta} = \frac{k_3 - \sqrt{k_3^2+4k_4}}{2k_4}$	$14-\beta$
	$\lambda_{2,\alpha} = \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2+4k_2}}{2k_2}$	$15-\alpha$	$\lambda_{2,\beta} = \frac{k_3 + \sqrt{k_3^2+4k_4}}{2k_4}$	$15-\beta$
Solutions in (x, y) axis system	$x_{1,\alpha} = a + h\lambda_{1,\alpha}$	$16-\alpha$	$x_{1,\beta} = b + h\lambda_{1,\beta}$	$16-\beta$
	$x_{2,\alpha} = a + h\lambda_{2,\alpha}$	$17-\alpha$	$x_{2,\beta} = b + h\lambda_{2,\beta}$	$17-\beta$
Mean of solutions values $x_{med} = (x_1 + x_2)/2$	$x_{\alpha,med} = a + \frac{h}{2}(\lambda_{1,\alpha} + \lambda_{2,\alpha})$	$18-\alpha$	$x_{\beta,med} = b + \frac{h}{2}(\lambda_{1,\beta} + \lambda_{2,\beta})$	$18-\beta$
New value for h $h^* = x_{med} - a$	$h^* = h \cdot \frac{k_1}{2k_2}$	$19-\alpha$	$h^* = h\left(1 + \frac{k_3}{2k_1}\right)$	$19-\beta$

Case II : $T_1 > 0$, y_a and y_b have the same sign ; in the given interval *there is no solution* or *an even number of solutions.*

The computation strategy in the two cases being completely different, they are studied separately below.



4. Case I: y_a and y_b have opposite signs

4.1 *Test for the parabolas curve accuracy*

As it has been shown in the introduction, if the third derivative vanishes in the $[a, b]$ interval, the parabola curve may be improper, namely it may not border the given function. This third derivative being not known, a test to verify the correctness of the parabola line is necessary.

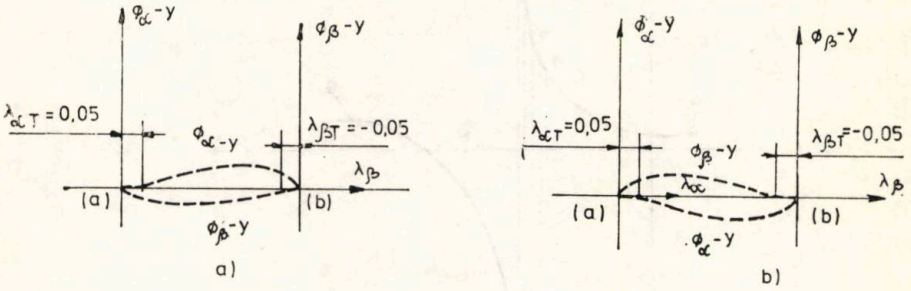


Fig. 2

The differences $\Phi_\alpha - y$ and $\Phi_\beta - y$ have been represented in Fig. 2 using dimensionless abscissas, with both parabolas having a correct line (Fig. 2, a : $\Phi_\alpha > \Phi_\beta$; Fig. 2, b : $\Phi_\alpha < \Phi_\beta$). The curve $\Phi_\alpha - y$ has zeroes in a and b (see $(2 - \alpha)$ and $(3 - \alpha)$) and is tangent to λ_α in a (see $(4 - \alpha)$); inside the interval $[a, b]$, $\Phi_\alpha - y > 0$. On the contrary, $\Phi_\beta - y < 0$, the β curve being tangent to λ_β in b (see $(4 - \beta)$). As a consequence, *if the two functions* Φ_α *and* Φ_β *border properly the function* y, the condition

$$T_2 = (\Phi_\alpha - y) \cdot (\Phi_\beta - y) < 0 \qquad (2)$$

is satisfied *for any point of the interval* (a, b).

If y''' vanishes between a and b, it is possible — but not compulsory*) that one of the curves, say $\Phi_\alpha - y$ (Fig. 3), starts from the left end with negative values and becomes positive on the right side. This improper line be emphasized by the test T_2, applied at two different points, near the ends of $[a, b]$:

$\lambda_{\alpha,T} = 0.05$, for the curve $\Phi_\alpha - y$;

$\lambda_{\beta,T} = -0.05$, for the curve $\Phi_\beta - y$.

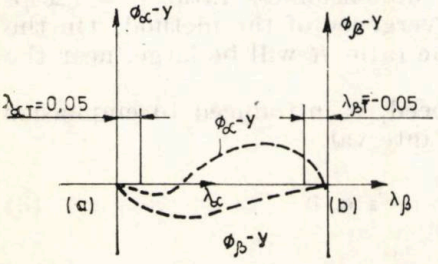


Fig. 3

If T_2 is not satisfied by one of the curves, the computation is restarted between a and $b = a + h_{\text{new}}$, where $h_{\text{new}} = h/2$.

* If the vanishing point is between one end and, approximately, 1/4 of the interval length, the parabola line remains correct.

Note: If the interval $[a, b]$ includes a discontinuity with a change of sign (Fig. 4), the test T_2 is invalidated.

Consequently, the interval will be halved several times, the points 1, 2, 3, 4 etc. tending "to climb" on the branch A of the curve to large

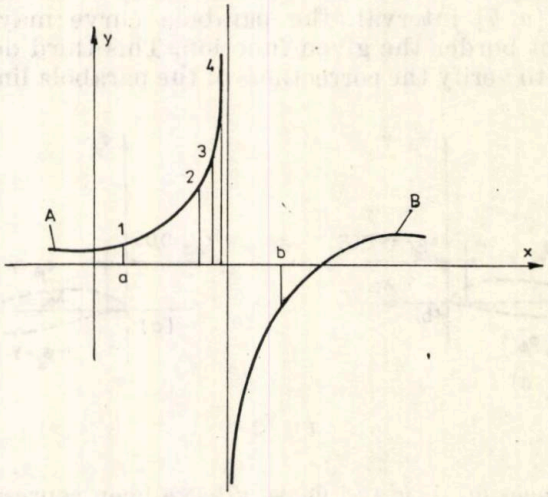


Fig. 4

values of the function y. A test which limits the absolute value of y (e.g. 10^6) permits to detect the discontinuity; after printing a message, the computation is transferred to the branch B.

4.2 *Parabola intersections with the x-axis. Test on the convergence speed*

If the test T_2 is satisfied, the intersections between the two parabolas and the x-axis are to be obtained by equaling $(13 - \alpha)$ and $(13 - \beta)$ with zero. The solutions $x_{1,\alpha}$ and $x_{1,\beta}$ given by $(16 - \alpha)$ and $(16 - \beta)$ are included in $[a, b]$ [1]. In the interval $|\Delta x| = |x_{1,\alpha} - x_{1,\beta}|$ an odd number of solutions may exist for $y(x) = 0$.

If there is only one solution the dimensionless ratio $R = |\Delta x/h$ has a small value, due to the rapid convergence of the method. On the contrary, if there are many solutions, the ratio R will be large, near the unity.

A test proving the convergence speed, is introduced to emphasize the existence of only one solution in the interval.

$$T_3 = \frac{|x_{1,\alpha} - x_{1,\beta}|}{h} - \varepsilon \leqslant 0 \tag{3}$$

where ε can be choosed (e.g. $\varepsilon = 0.1$).

If the test (3) is satisfied the approached value of the root can be obtained [1]; if not, the computation has to be restarted between a and $b = a + h_{\text{new}}$ where $h_{\text{new}} = h/2$.

Example

Let $y(x) = x(x^2 - 1)(x - 9)$ be represented in Fig. 5. The third derivative $y'''(x) = 24x - 54$, vanishes for $x = 2.25$.

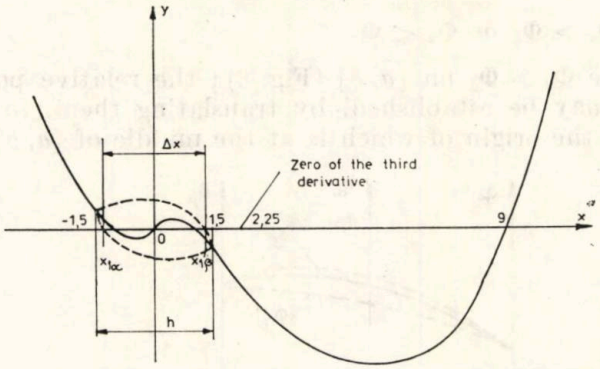


Fig. 5

Suppose $a = -1.5$ and $b = -0.8$; inside this interval there is one root $x = -1$ and T_2 is satisfied. From $(16 - \alpha)$ and $(16 - \beta)$ one obtains $x_{1,\alpha} = -1.03334$ and $x_{1,\beta} = -0.987933$ respectively. The ratio

$$R = \frac{|\Delta x|}{h} = \frac{|x_{1,\alpha} - x_{1,\beta}|}{b - a} = \frac{0.04541}{0.7} = 0.06487 < \varepsilon$$

proves the existence of only one solution.

If the interval is between $a = -1.5$ and $b = 1.5$ (Fig. 5) the test T_2 is also satisfied, but there are three roots of $y(x) = 0$ $(x = -1.,$ $x = 0., x = 1.)$. The geometrical configuration shows that $|\Delta x|$ is large and so is the ratio

$$R = \frac{|\Delta x|}{h} = \frac{|x_{1,\alpha} - x_{1,\beta}|}{b - a} = \frac{|-1.15035 - 1.125|}{3} = 0.75847 > \varepsilon$$

5. Case II: y_a and y_b have the same sign

5.1 *Identification of the closest parabola to the x-axis*

In this second case, the strategy of the analysis is modified, the aim being now to find out if the function y either does not cut the x-axis (no solution inside $[a, b]$), or cuts the x-axis, hence resulting the possibility of an even number of solutions *). Since one follows the curves α and β (not the actual curve of the function y), the problem reduces, seemingly, to find the roots of $\Phi_\alpha = 0$ and $\Phi_\beta = 0$. In fact, the problem may be

* Including the case of a double root.

simplified because the function y is bordered by the two curves α and β; there is enough to find which of these two curves is the closest to the x axis and to study only its line. The first problem to be solved is, in this second case, to identify this last curve.

5.1.1 $\Phi_\alpha > \Phi_\beta$ *or* $\Phi_\alpha < \Phi_\beta$

Suppose $\Phi_\alpha > \Phi_\beta$ on $[a, b]$ (Fig. 6); the relative position of these two curves may be established, by translating them, to the same axis system Φ, λ, the origin of which is at the middle of $[a, b]$. By replacing

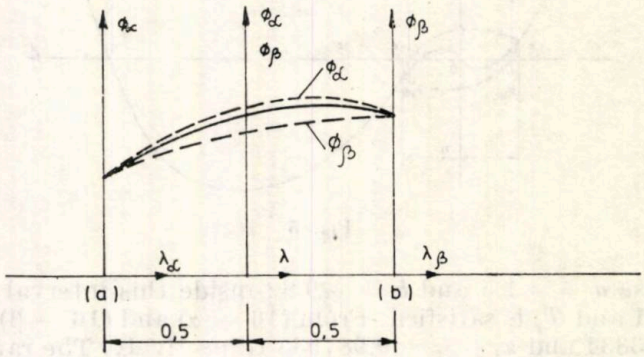


Fig. 6

$\lambda_\alpha = \lambda + 0.5$ in $(13 - \alpha)$ and $\lambda_\beta = \lambda - 0.5$ in $(13 - \beta)$, respectively one obtains, by performing some elementary calculation, the difference

$$\Phi_\alpha - \Phi_\beta = (y_b k_4 - y_a k_2)(\lambda^2 - 0.25) \tag{b}$$

where k_4, k_2 are given in Table 1. The difference vanishes for $\lambda = \pm 0.5$, it is negative inside $[a, b]$, having the extreme value for $\lambda = 0$. If

$$E = y_b \cdot k_4 - y_a k_2 \tag{c}$$

it result that

$$\Phi_\alpha > \Phi_\beta, \text{ if } E < 0 \tag{d}$$

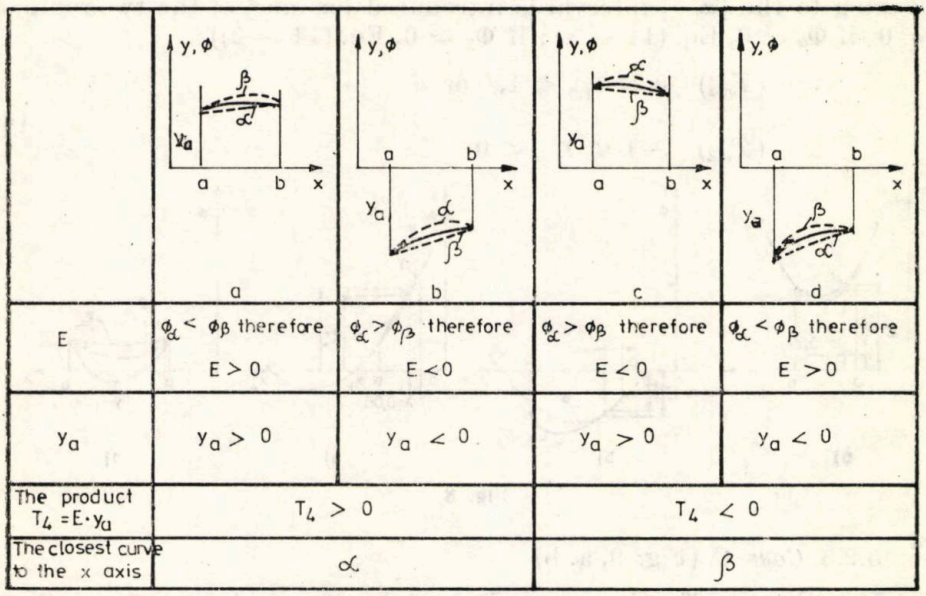
$$\Phi_\alpha < \Phi_\beta, \text{ if } E > 0 \tag{e}$$

5.1.2 *Identification test*

Figure 7 shows the four possible cases decided on one hand by $\Phi_\alpha > \Phi_\beta$ or $\Phi_\alpha < \Phi_\beta$, on the other by the positive or negative values ($y_a > 0$ or $y_a < 0$) on $[a, b]$ of the function y. From the analysis made on Fig. 7 it results *the test for the identification of the closest parabola to x-axis.*

— Curve α, if $T_4 = y_a(y_b k_4 - y_a k_2) > 0$ (4, a)

— Curve β, if $T_4 = y_a(y_b k_4 - y_a k_2) < 0$ (4, b)



E	$\Phi_\alpha < \Phi_\beta$ therefore $E > 0$	$\Phi_\alpha > \Phi_\beta$ therefore $E < 0$	$\Phi_\alpha > \Phi_\beta$ therefore $E < 0$	$\Phi_\alpha < \Phi_\beta$ therefore $E > 0$
y_a	$y_a > 0$	$y_a < 0$	$y_a > 0$	$y_a < 0$
The product $T_4 = E \cdot y_a$	$T_4 > 0$		$T_4 < 0$	
The closest curve to the x axis	α		β	

Fig. 7

5.2 *The intersection of the "closest parabola" with the x-axis*

The intersection of the parabola (chosed on the T_4 test basis) with the x-axis, gives more information (but no conclusive) on the actual trace of the function y. The main possible configurations are :

A. The parabola Φ does not intersect the x-axis (Fig. 8, a) ;

B. Φ intersects x, outside $[a, b]$ (Fig. 8, b, c) ;

C. The intersection point is inside $[a, b]$ (Fig. 9, a, b)

5.2.1 *Case A* (Fig. 8, a)

If Φ does not intersect x, *the equation* $y(x) = 0$ *has no solution* inside $[a, b]$, because Φ is between $y(x)$ and the x-axis. The equation $\Phi = 0$ ($\Phi\alpha$ or Φ_β) has real solutions if the values under the radical in $(14 - \alpha)$ or $(14 - \beta)$ are positive.

$$T_{5,\alpha} = k_1^2 + 4k_2 > 0, \text{ or} \qquad (5)$$

(T5)

$$T_{5,\beta} = k_3^2 + 4k_4 > 0$$

If the test T_5 *is not satisfied*, the configuration is that one which is given in Fig. 8, a.

5.2.2 *Case B* (Fig. 8, b, c)

If the test T_5 is satisfied but the roots of $\Phi = 0$ are outside $[a, b]$ the equation $y(x) = 0$, *has no roots inside that interval.* A test to find the

belonging to the $[a, b]$ interval is introduced for one* of the two roots of $\Phi = 0$ (if $\Phi_\alpha = 0$, Eq. (14 — α); if $\Phi_\beta = 0$, Eq. (14 — β))

$$(T_{6,\alpha}) \quad 0 \leqslant \lambda_{1,\alpha} \leqslant 1, \quad \text{or}$$
$$(T_{6,\beta}) \quad -1 \leqslant \lambda_{1,\beta} \leqslant 0 \tag{6}$$

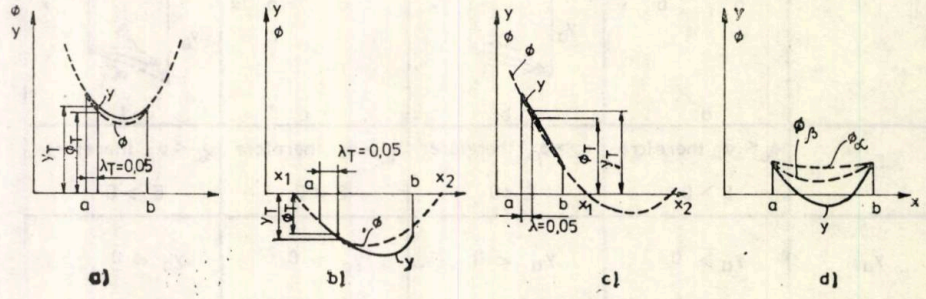


Fig. 8

5.2.3 *Case C* (Fig. 9, a, b)

If both tests T_5, T_6 are satisfied, $y(x) = 0$ may have two solutions inside $[a, b]$ (Fig. 9, a) or no solution (Fig. 9, b). If case C occurs *the computation has to be continued*; the mean value of the roots x_{med} is obtained

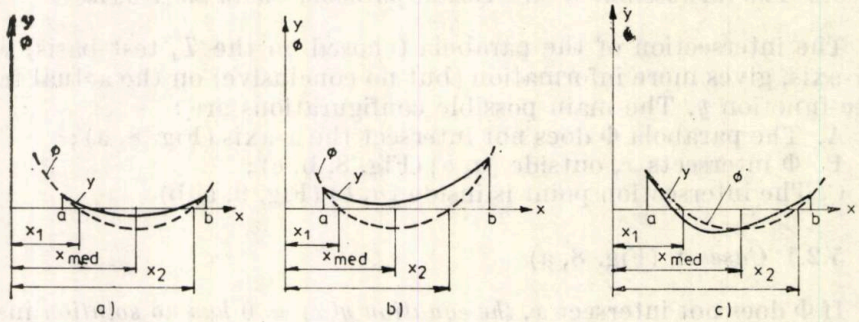


Fig. 9

from (18 — α) or (18 — β) and the computation has to be resumed on the reduced interval $[a, x_{\text{med}}]$. If the configuration is that one given in Fig. 9,a, this new computation will give $y_a y_{x_{\text{med}}} < 0$ (case I), a root separation being possible inside $[a, x_{\text{med}}]$; for the case given in Fig. 9, b one obtains $y_a y_{x_{\text{med}}} > 0$ (case II), the analysis leading to the same situation as in Fig. 8, c, consequently with no root inside $[a, x_{\text{med}}]$.

Note 1. In Case C it is not necessary to verify the accuracy of the parabola line, because the computation is compulsory resumed on the interval $[a, x_{\text{med}}]$ (see Fig. 9, c). On the contrary, in the cases A and B

* The two roots are both inside or both outside $[a, b]$; the test on one root is, then, enough.

the decision is final : *no solution inside* $[a, b]$ therefore *the computation is transferred on the next interval.* In both Cases A and B the check of the correct curve of the parabola Φ is compulsory, because $y(x) = 0$ may have two solutions (Fig. 8, d) and Φ (with an incorrect trace) does not intersect the x-axis.

Note 2. When the computation is transferred to the next interval, the step is doubled ($h_{new} = 2h$), in order to accelerate the scanning of the whole domain.

5.3 *Check of the y trace correctness*

The check is done at $\lambda_{\alpha,T} = 0.05$ for the Φ_α curve or at $\lambda_{\beta,T} = -0.05$ for the Φ_β curve (see par. 4.1). Now the test has to be accomplished only for one curve $\Phi(\Phi_\alpha$ or $\Phi_\beta)$, which has to be nearer to the x-axis than x (see Fig. 9, b, c)

$$\frac{\Phi_T}{y_T} < 1 \tag{f}$$

If the trace of Φ is correct, the test

$$T_7 = \frac{\Phi_T}{y_T} - 1 < 0 \tag{7}$$

will be satisfied.

5.4 *Double roots*

If $y(x) = 0$ has a double root, $\Phi = 0$ leads to the configuration given in Fig. 9, a. The computation will be carried on, on a reduced interval *but only in the Case II* ($y_a y_{x_{med}} > 0$) ; as a consequence the right end x_{med} of the interval tends to approach to $y_{x_{med}} \approx 0$ and $y'_{x_{med}} \approx 0$, but without the possibility to go beyond this point. If the computation is resumed several times with the same a and different x_{med}, a test concerning very small values of $y_{x_{med}}$ and $y'_{x_{med}}$ has to be introduced, to call the attention on a possible double root and to transfer the computation on the next interval.

6. Program and tests

The above considerations are summarised in the block-diagram given in page 20. A program, written in FORTRAN language, has been succesfully tested on various types of continuous and discontinuous functions. From these tests, some non-trivial examples are mentioned below :

a) $\mathrm{SIN}(x) - 0\text{-}99999999 = 0$

For $x \in [0,100]$, there are 16 pairs of adjacent solutions (e.g. $x_1 = 1.5706549$ and $x_2 = 1.5709377$), the third derivative vanishing within each pair (e.g. at $\pi/2 = 1.5707963$)

b) $\mathrm{SIN}(1/x) - x = 0$

Large number of solutions, if x approaches zero :

for $x \in [-0.32, -0.00316]$, there are 100 solutions.

c) A 20 degree polynomial, with several groups of 3—4 solutions on narrow intervals (e. g. $x_1 = 1.001$, $x_2 = 1.002$, $x_3 = 1.003$, $x_4 = 1.005$).

d) $\dfrac{\mathrm{TAN}(x)}{x^2 - 1} - x = 0$

For $x \in [-50,50]$, 34 discontinuities and 33 solutions have been found. At $x = -15.5$, the first discontinuity has been obtained with 12 accurate digits (-48.6946861306); the first solution ($x_1 = -48.6946774662$) has been separated from the discontinuity, though the difference between them is only $\Delta x = 0.0000086644$.

REFERENCES

1. *M. Blumenfeld*, Bul. IPB, Tom XXXIX, 1977, nr. 3.
2. *M. Blumenfeld, R. Folea*, Bul. IPB, Tom XXXIX, 1977, nr. 4.
3. *C. Berbente, M. Blumenfeld*, Bul. IPB, Tom XLI, 1979, nr. 3.

Separarea rădăcinilor ecuațiilor transcendente și polinomiale pe baza metodei funcțiilor de bordare

Orice funcție $y(x)$ poate fi înlocuită, pe intervale în care a treia derivată nu schimbă semnul, prin două parabole care bordează inferior și superior funcția dată. Ca urmare, rădăcinile oricărui tip de ecuație (transcendentă sau polinomială, continuă sau discontinuă) pot fi separate, urmărind traseul celor două parabole de bordare. Programul, bazat pe această idee, a permis separarea rădăcinilor unor funcții nebanale (de exemplu transcendente și discontinue). Este necesară cunoașterea primei derivate a funcției.

C.Z.:517.97:53

ASUPRA APLICĂRII METODEI VARIAȚIONALE ÎN STUDIUL DIFUZIEI

AURELIA POPA *

Se studiază problema determinării unei funcții care satisface (1) ; (2) ; (3), în condiții care generalizează pe cele din [3] ; după o formulare variațională a unei probleme echivalente, sînt prezentate fără detalii de demonstrație etapele rezolvării aplicației prin metoda elementelor finite.

Formularea problemei

Fie U un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^n$ cu frontiera, FrU o hipersuprafață de clasă C^1 nesingulară, reuniune a două porțiuni Γ_1, Γ_2 ($FrU = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, unde intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ este neglijabilă).

În cele ce urmează studiem problema determinării unei funcții $u(x_1, \ldots, x_n)$ de clasă C^2

$u : U \to \mathbb{R}$ (funcția temperatură)

astfel încît

$$\Delta u - \lambda u = g \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h(u) \text{ pe } \Gamma_1 \tag{2}$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{pe } \Gamma_2 \tag{3}$$

unde $\alpha > 0$, α, β sînt constante, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție monoton crescătoare și mărginită, iar $g \in L^2(U)$.

Abordarea variațională

Considerăm spațiul vectorial normat real

$$V = \left\{ v \in H^1(U) / \alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \text{ pe } \Gamma_2 \right\}$$

* Asist., catedra Matematici II

care este subspaţiu al spaţiului Sobolev $H'(U)$
al funcţiilor $v \in L^2(U)$ cu $\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \in L^2(U)$ cu produsul scalar :

$$< v, w > = \int_U u(x_1, \ldots, x_n) v(x_1 \ldots x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n + \sum_{k=1}^{n} \int_U \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial v}{\partial x_k}\, \mathrm{d}x_1 \cdot \mathrm{d}x_u$$

care îl înzestrează cu o structură de spaţiu Hilbert. Pentru orice $v \in V$ norma lui v este exprimată prin $\| v \| = < v, v >^{1/2} = \left(\int_\Omega \left[v^2 + | \nabla v |^2 \right] \mathrm{d}x_1 \ldots \right.$

$\left. \ldots \mathrm{d}x_u \right)^{1/2}$

Asupra frontierei lui U facem ipoteza suplimentară că

$$\lim_{\substack{v \to 0 \\ v \in V}} \int_{\Gamma_1} v(x_1 \ldots x_u)\, \mathrm{d}\sigma = 0$$

Considerăm de asemenea funcţionala :

$$J : V \to \mathrm{R}$$

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_U [\lambda v^2 + | \nabla v |^2 - 2gv]\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_u - \int_{\Gamma_1} Z(v(x_1 \ldots x_u)\, \mathrm{d}\sigma = J_1 - J_2$$

unde

$$Z(z) = \int_0^z h(t)\ \mathrm{d}t$$

Teorema 1. „Problema minimizării funcţionalei J admite o soluţie în V şi aceasta este unică".

Se verifică direct că funcţionala J este strict convexă şi că aplicaţia $J_1 : V \to \mathbb{R}$ este continuă.

Pe de altă parte aplicaţia $J_2 : V \to \mathbb{R}$ este continuă. Pentru aceasta este suficient să observăm că

$$| Z(z) - Z(z') | = \left| \int_0^z h(t)\, \mathrm{d}t - \int_0^{z'} h(t)\, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_z^{z'} h(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant | z - z' |\, \| h \|$$

deci pentru orice creştere Δv a lui v avem

$$J_2(v + \Delta v) - J_2(v) = \int_{\Gamma_1} [z(v + \Delta v) - z(v)]\, \mathrm{d}\tau$$

și

$$|J_2(v+\Delta v)-J_2(v)| \leqslant \int_{\Gamma_1} |v+\Delta v-v|\,\|h\|\,\mathrm{d}\sigma = \|h\| \int_{\Gamma_1} |\Delta v|\,\mathrm{d}\sigma$$

J_2 este continuă conform ipotezei făcute asupra frontierei lui. Așadar J_1, J_2 sînt continue deci J este continuă; în plus, $\lim_{\|v\|\to\infty} \sigma(v) = \infty$ (rezultă aplicînd un rezultat clasic (Teorema 21, [3]).

Corolar. Problema (1) + (2) + (3) admite o soluție și aceasta este unică.

Demonstrație. Mai întîi să observăm că minimul $\min_{v\in V} J(v)$ este atins, aplicînd ecuația Euler-Lagrange, exact în lungul soluțiilor ecuației (1) cu condiția (2), iar condiția (3) este definitorie pentru însuși spațiul V de bază. Așadar problema (1) + (2) + (3) este echivalentă cu minimizarea funcționalei J în lungul lui V și rezultă corolarul.

3. Abordarea numerică

Asimilăm domeniul U cu un domeniu poligonal (alegem noduri convenabile pe $Fr\,U$) și considerăm o diviziune a lui V în elemente finite triunghiulare $\{T_i\}_{n\in I}$.

$\overline{U} = \bigcup_{i\in I} T_i$, I finită, unde Γ_i, Γ_j $(i \neq j)$ sînt fie disjuncte sau au cel mult o latură comună sau un vîrf comun.

Pentru fiecare element T_i, $i \in I$ notăm cu Vi subspațiul lui V al funcțiilor v continue pe $Fr\,U$ a.î. v/Ti este funcție spline de grad cel mult 3.

Subspațiile Vi sînt aproximate prin $H^1(U)$; în plus funcționala J se poate înlocui deasupra fiecărui element prin restricția ei J/V_i. Atunci avantajul discret al problemei minimizării lui J deasupra fiecărui element, constă în a determina funcții $u_i \in V_i$ astfel încît $J(u_i) \leqslant J(v)$ pentru orice $v \in V_i$.

Considerînd funcționala biliniară simetrică

$$a : V\times V \to \mathbb{R}\ (u, v) \to \int_U (\nabla U \cdot \nabla v + \lambda uv)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n)$$

atunci

$$J(v) = \frac{1}{2}\,a(v, v) - \int_U g\cdot v\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n - J_2(v)$$

și ca atare avem de aflat $u_i \in Vi$ astfel încît $\forall v \in Vi$ să avem

$$\frac{1}{2}\,a(u_i, u_i) - J_2(u_i) - \int_U g\cdot u_i\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \leqslant \frac{1}{2}\,a(v, v) - J_2(v)$$

sau echivalent

$$(4) \qquad a(u_i,\ v - u_i) + J_2(v) - J_2(u_i) \geqslant \int_V g(v - u_i)\ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_u$$

Ţinînd cont că J_2 este convexă şi continuă conform teoremei 1 rezultă următorul similar discret al teoremei 1.

Teorema 2. Pentru orice $i \in I$ există şi este unică o funcţie $u_i \in V_i$ astfel încît integrala (4) să fie sătisfăcută pentru orice $v \in U_i$

Aşadar rezolvarea numerică a problemei (1) + (2)+(3) revine la rezolvarea problemei variaţionale discrete (4) cu metoda uzuală de tip Ritz—Galerkin

[Alegem o bază convenabilă $e_1, \ldots, e_u$ pentru spaţiul finit dimensional Vi şi scriem

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} x_j^i e_j \quad i \in J \quad v = \sum_{j=1}^{N} y_j e_j$$

Numerele reale y_j fiind arbitrare problema revine la determinarea lui x_j^i prin tehnici liniare].

Notăm cu L lungimea laturii celei mai mari a triunghiurilor elemente finite T_i şi presupunem că unghiurile tuturor triunghiurilor T_i sînt cuprinse între două limite $p \to q$ $(o < p < q < \pi)$ atunci se poate arăta că notînd cu u_i soluţia problemei (4), $\lim_{L \to 0} u_i$ există în $H'(\mathrm{U})$ şi este chiar soluţia problemei (1) + (2) + (3).

Demonstraţia urmează fără dificultate metoda dată în (3) pentru cazul particular al problemei (1) + (2) în care condiţia 3 este înlocuită prin $n = 0$ pe Γ_2.

Exemplu

Fie $n = 2$ şi U = placa $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$ $\Gamma_1 = \{x + y = 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, Γ_2 = porţiunea cuprinsă pe axe. Considerăm $g = 0$, $h(x) = \mathrm{arctg}\ x$; $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Aşadar, deasupra lui U este formulată problema determinării funcţiei $u(x,y)$ astfel încît

$$\Delta u - \lambda u = 0\,; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{arctg}\ u \text{ pe } \Gamma_1,\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_2$$

în acest caz luăm

$$V = \{v \in H'(\Gamma)/v = 0 \text{ pe } \Gamma_2\}$$

problema revine la minimizarea funcţionalei $J : V \to \mathrm{R}$

$$J(v) = \frac{1}{2} \iint_U \left[\lambda u^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y - \int_{\Gamma_1} [v\ \mathrm{arctg}\ v -$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + v^2)]\ \mathrm{d}s.$$

Se poate considera o triunghiularizare a lui U considerînd o diviziune echidistantă a segmentului $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$ şi ducînd prin punctele respective paralelele la axa Oy şi la dreapta $x + y = 1$.

Pentru fiecare din triunghiurile formate se poate determina o funcţie spline (de grad $\leqslant 3$) care minimizează restricţia funcţionalei J şi se asamblează rezultatele.

Metoda poate fi prezentată sub forma unui algoritm programabil.

BIBLIOGRAFIE

1. *G. Dincă*, Metode variaţionale, Ed. tehnică, 1981.
2. *G. Duvant, J. L. Lions*, „Les inéquations en mécanique et en physique", 1972.
3. *R. Glowinski, L. J. Lions, R. Trémolières*, „Analyse numérique des inéquations variationnelles", 1976.

On the Application of Variational Method

In this note the problem of determination of a function which satisfies (1,) (2), (3) is solved, by a variational method. The steps of the solution prepare the application of finite element method.

C.Z.: 514. 743

TRANSFORMĂRI DE CONEXIUNE CARE CONSERVĂ TENSORUL DE CURBURĂ

P. STAVRE *

În acest articol se studiază conexiunile coparalele și metricile semi-simetrice pentru care tensorul de curbură se conservă.

Vom nota prin L_n o varietate diferențiabilă n-dimensională, de clasă C^∞, în care se dă o conexiune liniară, D, care are tensorul de torsiune

$$T(x, y) = D_x y - D_y x - [x, y], \qquad x, y \in x(L_n)$$

și tensorul de curbură

$$R(x, y)z = D_x D_y z - D_y D_x Z - D_{[x,y]} Z.$$

Dacă torsiunea este nulă ($T = 0$) vom nota L_n pin A_n.

Într-o hartă locală $(U, \varphi) = (x^1 \ldots x^n)$ vom nota coeficienții conexiunii D prin Γ^h_{ij} și

$$T^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \Gamma^h_{ji}$$

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^h_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^h_{ij} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^h_{sj} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^h_{sk}.$$

Tensorul lui Bianchi va fi notat pri $B_{jk} = R^i_{ijk}$ iar tensorul lui Ricci prin $R_{ij} = R^s_{ijs}$.

§1. **Definiția 1.** O transformare de conexiune $\bar{D} = \psi(D)$, pentru care $\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk}$, se va numi transformare de tip Γ_R.

Să considerăm un spațiu L_n cu conexiune liniară D coparalel cu un spațiu A_n (fără torsiune) cu conexiune liniară, simetrică, $\bar{D}$. Avem ([1]):

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \omega_j \delta^h_i \tag{1.1}$$

unde ω este un covector. Evident, D este semi-simetrică adică tensorul de torsiune T^h_{ij} este de forma

$$T^h_{ij} = \omega_i \delta^h_j - \omega_j \delta^h_i \tag{1.2}$$

* Prof., Universitatea Craiova

Avem

$$\omega_j = -\frac{1}{n-1} T_j ; \quad (T_j = T^h_{hj}) \tag{1.3}$$

Deci

$$T^h_{ij} = \frac{1}{n-1}(T_j \delta^h_i - T_i \delta^h_j) \tag{1.4}$$

Rezultă

$$T^h_{ij}\omega_h = 0 \tag{1.5}$$

$$T^h_{ij}T_h = 0 \tag{1.6}$$

$$T^k_{ij|k} = \omega_{i|j} - \omega_{j|i} = \frac{1}{n-1}(T_{j|i} - T_{i|j}) \tag{1.7}$$

unde s-a notat prin, |, derivarea covariantă în raport cu D.

Cum avem

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \omega_{i|j} - \omega_{j|i} + T^s_{ij}\omega_s. \tag{1.8}$$

din (1.7) (1.8), rezultă

$$T^k_{ij|k} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}\right) = (d\omega)_{ji} \tag{1.9}$$

unde s-a notat prin d, operatorul de diferențiere exterioară).

Lema 1. Dacă D este o conexiune semi-simetrică atunci propozițiile următoare sînt echivalente ([5]):

a) divergența torsiunii, lui D, este nulă, ($T^k_{ij|k} = 0$)

b) $T_{i|j} = T_{j|i}$

c) T_k este local un gradient

d) ω este închisă.

Lema 2. Dacă $\overline{D}$, D sînt coparalele ($\overline{D}$ simetrică), atunci avem

$$\overline{B}_{jk} - B_{jk} = \frac{n}{n-1}(T_{j|k} - T_{k|j}) \tag{1.10}$$

Demonstrație. Din (1) rezultă

$$\overline{\Gamma}_j - \Gamma_j = -\frac{n}{n-1} T_j ; \quad (\Gamma_j = \Gamma^i_{ij}) \tag{1.11}$$

Înlocuind (1.11) în expresi diferenței $\overline{B}_{jk} - B_{jk}$ se obține (1.10).

Teorema 1. Condiția necesară și suficientă ca să avem (adică Γ să fie de tipul Γ_R)

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} \tag{1.12}$$

este oricare dintre a) b) c) d).

Demonstrație. Dacă avem îndeplinită una din aceste condiții echivalente, atunci, din (10), rezultă și

$$\bar{B}_{jk} = B_{jk} \tag{1.13}$$

Cum avem

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}\delta^h_i(T_{j/k} - T_{k/j}) \tag{1.14}$$

rezultă (1.12).

Reciproc. Din (1.12), (1.14), rezultă b) și deci echivalent a) sau c) sau d).

Teorema 2. Dacă L_n este coparalel cu un spațiu A_n și tensorii de curbură se corespund ,(12), atunci L_n are torsiune constantă.

Demonstrație. Se spune că un spațiu L_n are torsiune constantă, dacă există o hartă locală în care coeficienții torsiunii sînt constanți.

Din (1.12) rezultă că avem

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} = 0 \tag{1.15}$$

Fie forma Pfaff, invariantă,

$$ds = \omega_k \, dx^k \tag{1.16}$$

Covariantul biliniar corespunzător are coeficienții

$$a_{jk} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} = 0 \tag{1.17}$$

Deci există o hartă locală în care forma Pfaff are forma canonică

$$ds = dx^1 \tag{1.18}$$

și deci ω are componentele $(1,0 \ldots . 0)$. Deci T^h_{ij} se scriu, în această hartă

$$\begin{aligned} &T^h_{1j} = \delta^h_j = -T^h_{j1}; \qquad j > 1 \\ &T^h_{ij} = 0; \qquad i = j = 1 \text{ sau } i, j > 1 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Prin urmare spațiul are torsiune constantă.

În această hartă (1.1) se scriu sub forma

$$\bar{\Gamma}^i_{j1} = \Gamma^i_{j1} + \delta^i_j; \quad \bar{\Gamma}^i_{1j} = \Gamma^i_{1j} \quad j > 1; \quad \bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} \; j > 1, \; k > 1. \tag{1.20}$$

Cum $\overline{\Gamma}$ este simetrică, acum capătă un sens mai concret denumirea de semi-simetrică pentru Γ.

Prin urmare, cu asemenea spaţii se va opera mai uşor (în sisteme fizice), dacă ţinem seama de teorema 2.

Chiar în demonstrarea egalităţii (1.12), dacă ω este închisă, vom folosi (1.20) şi rezultatul este direct.

Dacă în L_n este dată o metrică Riemanniană, g, atunci, fie structura Riemanniană $V_n(g, \nabla)$, unde ∇ este conexiunea Levi-Civita corespunzătoare ($\nabla g = 0$, ∇ simetrică). Dacă L_n este coparalel cu V_n, avem

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} - \omega_k \delta^i_j. \tag{1.1'}$$

În acest caz, mai particular, rezultatele de mai sus rămîn, înlocuind $\overline{\Gamma}$ cu $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$. În acest caz (Γ, ω, g) definesc o structură de spaţiu Weyl, W_n([7]).

$$g_{ij/k} = 2\omega_k g_{ij} \tag{1.21}$$

Tot în acest caz, condiţiile a) b) c) d) sînt echivalente cu (1.12) şi cu

$$\overline{B}_{jk} = B_{jk} = 0 \tag{1.22}$$

§ 2. În cazul mai general al conexiunilor D, $\overline{D}$ coparalele, avem (1.1) dar $\overline{D}$ nu mai este simetrică.

Din (1.1) rezultă

$$\overline{T}_j = T_j + (n-1)\omega_j\,; \quad \overline{\Gamma}_j = \Gamma_j + n\omega_j \tag{2.1}$$

$$\overline{B}_{jk} - B_{jk} = n\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k}\right) \tag{2.2}$$

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_i\left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k}\right) \tag{2.3}$$

dacă ţinem cont de (1.8). De unde

Teorema 1. Condiţia necesară şi suficientă ca tensorii de curbură $\overline{R}^h_{ijk}$, R^h_{ijk}, să se corespundă, este ca ω să fie închisă, sau $\overline{B}_{jk} = B_{jk}$, sau

$$\frac{\partial \overline{T}_k}{\partial x^j} - \frac{\partial \overline{T}_j}{\partial x^k} = \frac{\partial T_k}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^k} \tag{2.4}$$

În acest caz, există o hartă locală în care

$$\omega_k = \delta^k_1 \tag{2.5}$$

şi deci avem

$$\overline{\Gamma}^h_{j1} = \Gamma^h_{j1} + \delta^h_j\,; \qquad \overline{\Gamma}^h_{jk} = \Gamma^h_{jk} \quad \text{cu } k > 1, \tag{2.6}$$

în harta corespunzătoare.

Pentru L_2 cazurile au fost studiate în altă lucrare.

§.3. Fie L_n în care este dat un tensor (0.2), g, simetric, nedegenerat (o metrică Riemanniană). Fie ∇ conexiunea Levi-Civita ($\nabla g = 0$, ∇ simetrică) cu coeficienţii $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$, în harta locală considerată la început. O conexiune liniară D în L_n este metrică dacă $Dg = 0$. Conexiunile liniare, D, metrice se obţin prin

$$\Gamma^l_{ij} = \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} T^l_{ij} + \frac{1}{2}(T^h_i g_{hj} + T^h_{jk} g_{hi}) g^{kl} \tag{3.1}$$

unde T^h_{ik} este un tensor (1,2) strîmb simetric în (i, k).

Dacă se ia

$$T^h_{ij} = \omega_i \delta^h_j - \omega_j \delta^h_i, \tag{3.2}$$

adică se cere ca D, metrică, să fie semi-simetrică, atunci se obţine

$$\Gamma^h_{ij} = \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} + \omega_i \delta^h_j - g_{ij} \omega^h; \quad (\omega^h = g^{hk} \omega_k) \tag{3.3}$$

şi reciproc. Adică toate conexiunile semi-simetrice, metrice, se obţin prin (3.3), unde ω_k este un covertor arbitrar. Invariant, se scriu ([4])

$$D_x y = \Delta_x y + \omega(y) x - g(x, y) G_* \omega; \qquad x, y \in x(L_n) \tag{3.3'}$$

unde G_* este izomorfismul de F—module $G_* : \Lambda^1(L_n) \to x(L_n)$ indus de g prin

$$g(x, G_* \omega) = \omega(x), \qquad x \in x(L_n) \tag{3.3''}$$

Din

$$R_{kj} - R_{jk} = B_{jk} + \frac{\partial T_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T_k}{\partial x^j} + T^s_{jk|s}, \tag{3.4}$$

în baza relaţiilor din § 1, rezultă (pentru $n > 2$)

$$R_{kj} - R_{jk} = B_{jk} + (n - 2)(\mathrm{d}\omega)_{jk} \tag{3.5}$$

Din (3.3), rezultă

$$B_{jk} = 0 \tag{3.6}$$

De unde

Lema 1: Conexiunile semi-simetrice, metrice, au tensorul lui Bianch nul (deci sît echiafine).

Lema 2: Condiţia necesară şi suficientă ca pentru o conexiune semi-simetrică, metrică, în $L_n (n > 2)$, tensorul lui Ricci să fie simetric, este oricare din condiţiile a) b) c) d) §1.

În acest caz există o hartă locală în care torsiunea are forma canonică (1.19).

De unde,

Teorema 1. Un spațiu L_n cu conexiunea liniară semi-simetrică, metrică, dacă are tensorul lui Ricci simetric, atunci este un spațiu cu torsiune constantă.

Cum în acest caz avem (2.5), din (3.3) se poate obține ușor forma canonică a conexiunii.

La o transformare generală de conexiune în L_n dacă notăm $D^h_{ik} = \overline{\Gamma}^h_{ik} - \Gamma^h_{ik}$ (tensorul deformării afine) avem relația

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + D^h_{ik/j} - D^h_{ij/k} + D^s_{ik}D^h_{sj} - D^s_{ij}D^h_{sk} - T^s_{jk}D^h_{is} \tag{3.7}$$

(unde / este derivarea covariantă în raport cu Γ).

În cazul conexiunilor (3.3) se obține relația

$$\begin{aligned} R^h_{ijk} = r^h_{ijk} &+ (\omega_{i/j} - \frac{1}{2} g_{ij}\omega^s\omega_s)\delta^h_k - \\ &- \left(\omega_{i/k} - \frac{1}{2} g_{ik}\omega^s\omega_s\right)\delta^h_j + \\ &+ g_{ij}g^{hs}\left(\omega_{s/k} - \frac{1}{2} g_{sk}\omega^m\omega_m\right) - \\ &- g_{ik}g^{hs}\left(\omega_{s/j} - \frac{1}{2} g_{sj}\omega^m\omega_m\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

(/ este derivata covariantă în raport cu Γ).

Dacă covectorul ω_k din (3.3) satisface condiția,

$$\omega_{s/k} - \frac{1}{2} g_{sk}\omega^m\omega_m = 0 \tag{3.9}$$

atunci tensorii de curbură R^h_{ijk} (pentru Γ) și r^h_{ijk} (pentru ∇) se corespund: $R^h_{ijk} = r^h_{ijk}$.

Adică Γ este de tipul Γ_R.

Invers. Dacă avem $R^h_{ijk} = r^h_{ijk}$ rezultă $R_{ij} = r_{ij}$, $R = r$ și de asemenea

$$R_{ij} - r_{ij} = (n-2)\left(\omega_{i/j} - \frac{1}{2} g_{ij}\omega^m\omega_m\right) + g_{ij}g^{hs}\left(\omega_{s/h} - \frac{1}{2} g_{sh}\omega^m\omega_m\right)$$

$$R - r = 2(n-1)g^{sh}\left(\omega_{s/h} - \frac{1}{2} g_{sh}\omega^m\omega_m\right) \tag{3.9'}$$

De unde rezultă, cum $n > 2$, chiar (3.9). Avem

Teorema 2. Condiția necesară și suficientă ca o conexiune semi-simetrică, metrică (dată prin (3.3) să fie de tipul Γ_R este (3.9).

Prin urmare aceste conexiuni sînt S-concirculare cu $f = 0$ ([6]).

BIBLIOGRAFIE

1. *L. P. Eisenhart*, Non-Riemannian Geometry, American Math. Soc. New-York, 27/1927.
2. *L. P. Eisenhart*, Riemannian Geometry, Princenton Univ. Press 1954.
3. *S. Kobayashi, K. Nomizu*, Foundations of Differential Geometry, I. Int. Publ. New-York, 1963.
4. *K. Yano*, Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl., R.S.R. XV (9) 1970, 1579-186
5. *P. Stavre*, Studii și cercetări matematice. Edit. Acad. R.S.R., tom .22 (1) 1970. 73—80
6. *P. Stavre*, On the S-concircular and S-coharmonic connections. Tensor, N.S. (to appear).
7. *D. Smaranda, O. C. Andonie*, Ann. Fac. Sci. de Kinshasa, Zaïre, vol. 2 (1976) 265—270.

Connection Transformations which Conserve the Curvature Tensor

In this paper there are studied the coparallely connections and semi — symmetric metric for which the curvature tensor is conserved.

C.Z.: 514.181.2: 621. 914
519. 68

METODA GRAFO-ANALITICĂ DE DETERMINARE A SECȚIUNILOR IN ELICOIZI ASISTATĂ DE CALCULATOR

ELISABETA VASILESCU, M. TOADER, L. RAICU, ILEANA VASILESCU, D. BĂRĂITARU, R. TUDOSE, MAGDA OLIMPIU, M. PELLE *

În cazul prelucrării melcilor transportori prin frezare, este necesară secțiunea cu un plan normal pe elicea medie pentru obținerea profilului sculei de prelucrat. Se propune o metodă grafică pentru determinarea acestei secțiuni, metodă rezolvată apoi analitic și grafic cu ajutorul calculatorului.

Suprafețele elicoidale sînt des întîlnite în tehnică, una dintre aplicațiile lor importante fiind în cazul melcilor.

Prelucrarea acestor suprafețe se poate face în general prin strunjire sau frezare. În cazul unui melc transportor, utilizat în instalația de producere a pastelor făinoase medii fig. 1 (un elicoid riglat drept fără cilindru

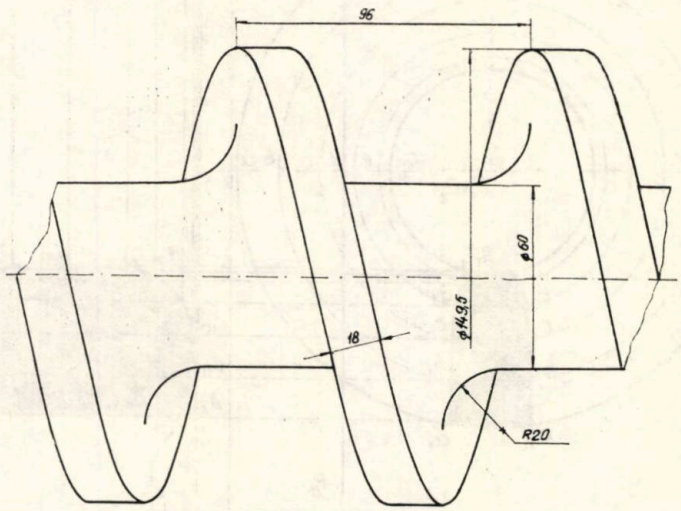


Fig. 1

* Șef lucrări dr. ing.; Asist. ing.; Asist. ing.; Asist. ing.; catedra Geometrie descriptivă și desen; Studenți

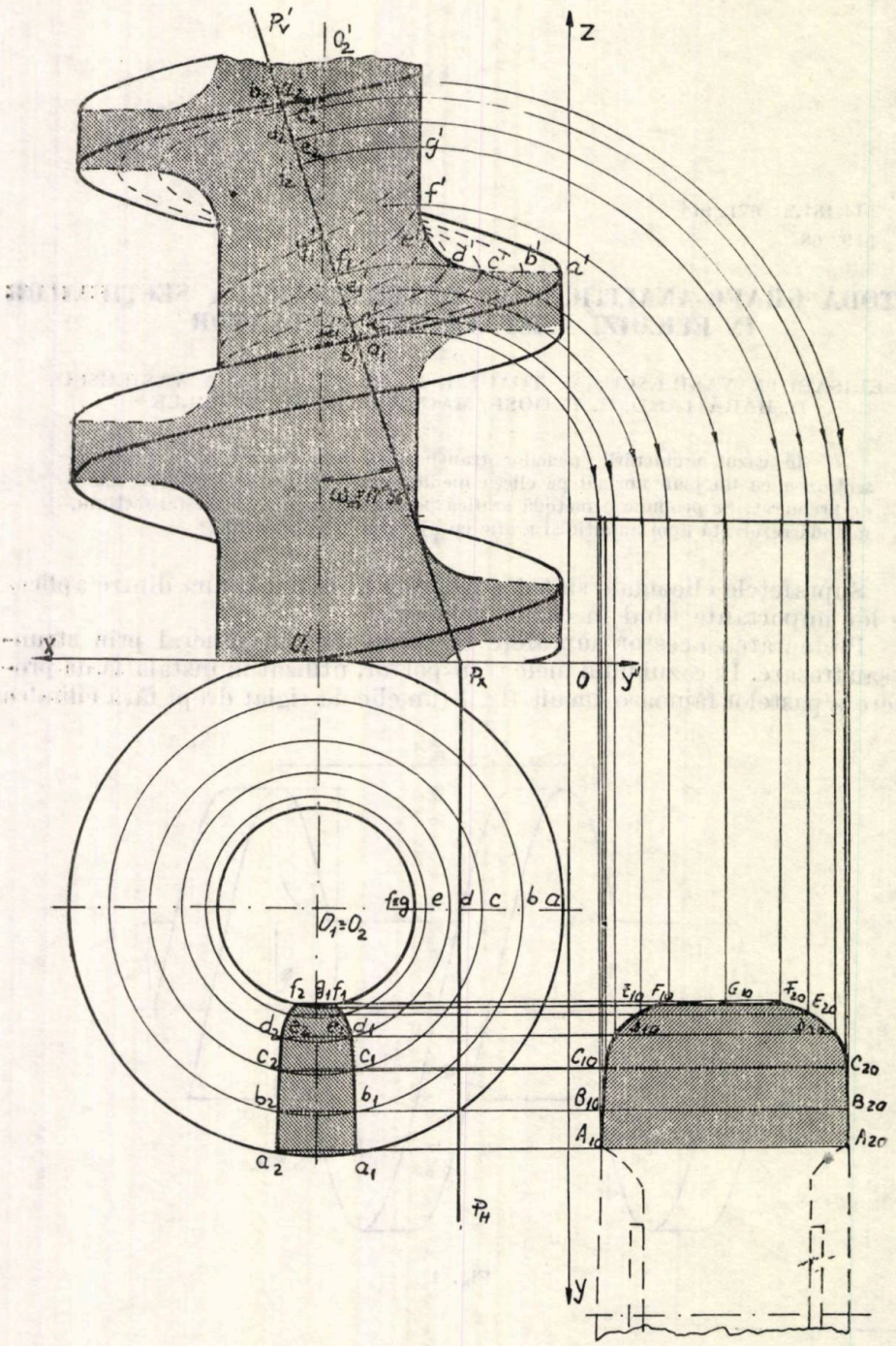

Z
Y
X
O
P_V'
O_2'
P_X
P_H
$O_1 \equiv O_2$
$f \equiv g$
e
d
c
b
a
f_2
g_1
f_1
d_2
e_2
e_1
d_1
c_2
c_1
b_2
b_1
a_2
a_1
E_{10}
F_{10}
G_{10}
F_{20}
E_{20}
C_{10}
C_{20}
B_{10}
B_{20}
A_{10}
A_{20}

Fig. 1

sîmbure) prelucrarea prin frezare are avantajul creșterii importante a productivității față de prelucrarea prin strunjire. Frezarea se face cu o freză, înclinată cu unghiul elicii medii ω_m față de axa melcului, profilul frezei fiind determinat de secțiunea cu un plan normal pe elicea medie.

Ne propunem să stabilim o metodă precisă grafo-analitică asistată de calculator pentru obținerea acestei secțiuni care constituie profilul frezei.

Într-o primă etapă, s-a obținut profilul frezei secționînd cu un plan proiectant pe un plan de proiecție elicoidul (fig. 2) reprezentat în dublă proiecție ortogonală și rabătînd planul de secțiune, iar în a doua etapă aceeași problemă a fost modelată matematic, transpusă sub forma unui program în limbaj FORTRAN IV rezultatele obținîndu-se sub formă de coordonate (X, Y) care determină secțiunea normală trasată grafic de plotter.

Pentru exemplificarea metodei am folosit melcul transportor din figura 1.

Pentru determinarea secțiunii normale pe elicea medie s-a construit în epură (fig. 2) melcul cu axa $\overline{O_1O_2}$ proiectantă pe planul orizontal de proiecție (scara 2 : 1) și s-a secționat acesta cu un plan de capăt [P] care face cu planul orizontal de proiecție unghiul ($90° - \omega_m$).

Se observă că suprafața melcului se obține prin rotirea profilului frontal A, C, F, G, $F2$, $A2$ în jurul axei $\overline{O_1O_2}$ cu pasul constant $p = 96$ mm.

În acest profil deosebim cinci zone (fig. 3). Zona I cuprinsă între punctele A_2 și C_2 și V cuprinsă între A și C care generează prin rotire doi elicoizi drepți.

Zona II cuprinsă între punctele C_2 și F_2 și IV cuprinsă între punctele C și F generează suprafețe de tip canal și anume porțiuni de serpentin.

Zona centrală III este o generatoare a cilindrului de fund de rază $RMIN = 30$ mm.

Pentru determinarea secțiunii s-au luat mai multe puncte A, B, C, D, E, F, G, punctul G situîndu-se pe axa de simetrie a profilului frontal și s-au trasat traiectoriile lor care sînt elice, proiectate pe planul vertical de proiecție după sinusoide iar în planul orizontal de proiecție după cercuri (fig. 2).

Proiecțiile verticale ale punctelor curbei de secțiune vor fi acolo unde traiectoriile punctelor în planul vertical de proiecție intersectează urma verticală Pv a planului de capăt [P] rezultînd $a1'$, $b1'$, $c1'$, $d1'$, $e1'$, $1'$, $g1'$ și simetricele lor în raport cu axa de simetrie a profilului $f2'$, $2'$, $d2'$, $c2'$, $b2'$, $d2'$.

Proiecțiile orizontale ale acestor puncte se află pe proiecțiile orizontale ale traiectoriilor și pe liniile de ordine respective rezultînd $a1$, $b1$, $c1$, $d1$, etc.

Printr-o rabatare a planului de secțiune [P] pe planul orizontal de proiecție punctele $A10$, $B10$, $C10$, $D10$, $E10$, $F10$, $G10$, $F20$ ... $A20$ din a căror unire rezultă adevărata mărime a secțiunii normale pe elicea medie,

Aceeași metodă s-a aplicat pentru melcul din fig. 4 care are zona centrală un trunchi de con, traiectoriile unor puncte de pe suparfață în această porțiune fiind elice conice. Melcul este așezat în epură cu axa proiectantă pe pe planul lateral de proiecție iar proiecțiile orizontale ale traiectoriilor punc-

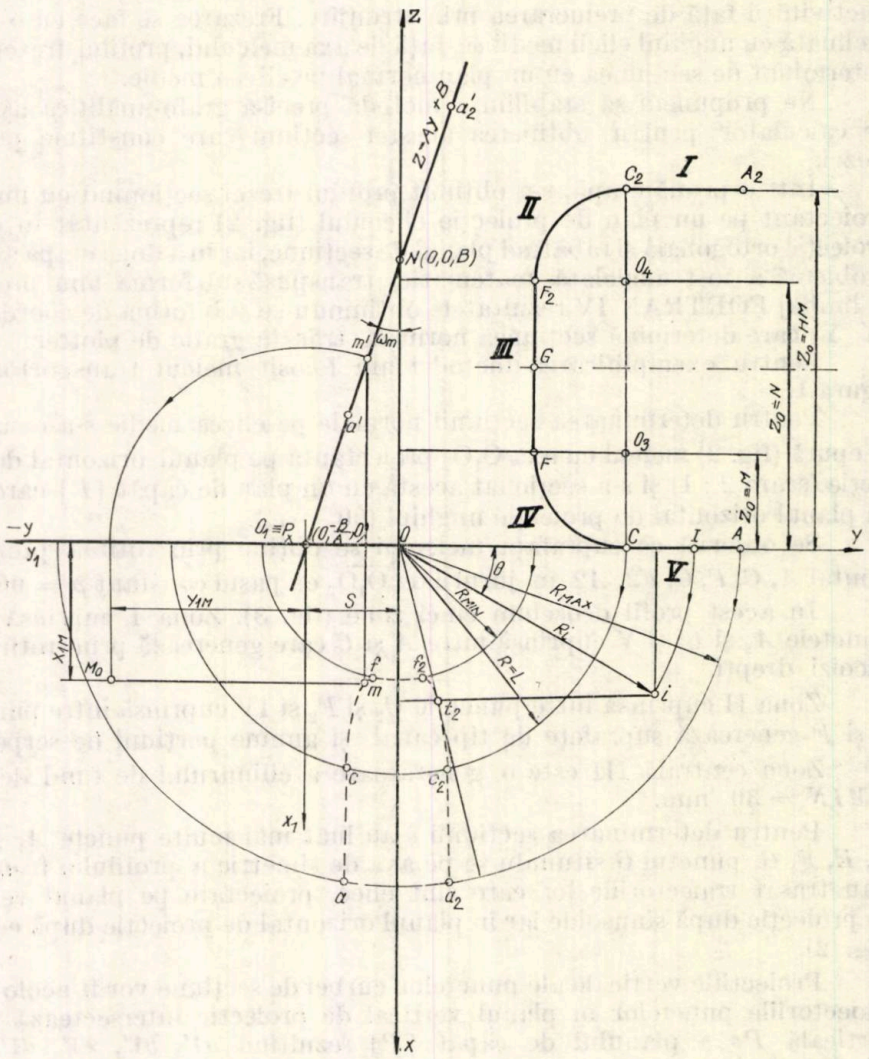


Fig 3.

telor sînt curbe identice cu cele din planul vertical de proiecţie dar defazate cu $\pi/2$.

Pentru rezolvarea analitică a problemei s-a pornit de la faptul că punctele curbei de secţiune descriu traiectorii elicoidale deci vor satisface ecuaţiile :

$$\begin{cases} X = R_i \sin(T) & T = \theta \text{ (theta)} \\ Y = R_i \cos(T) \\ Z = K \cdot T + Z_0 \end{cases}$$

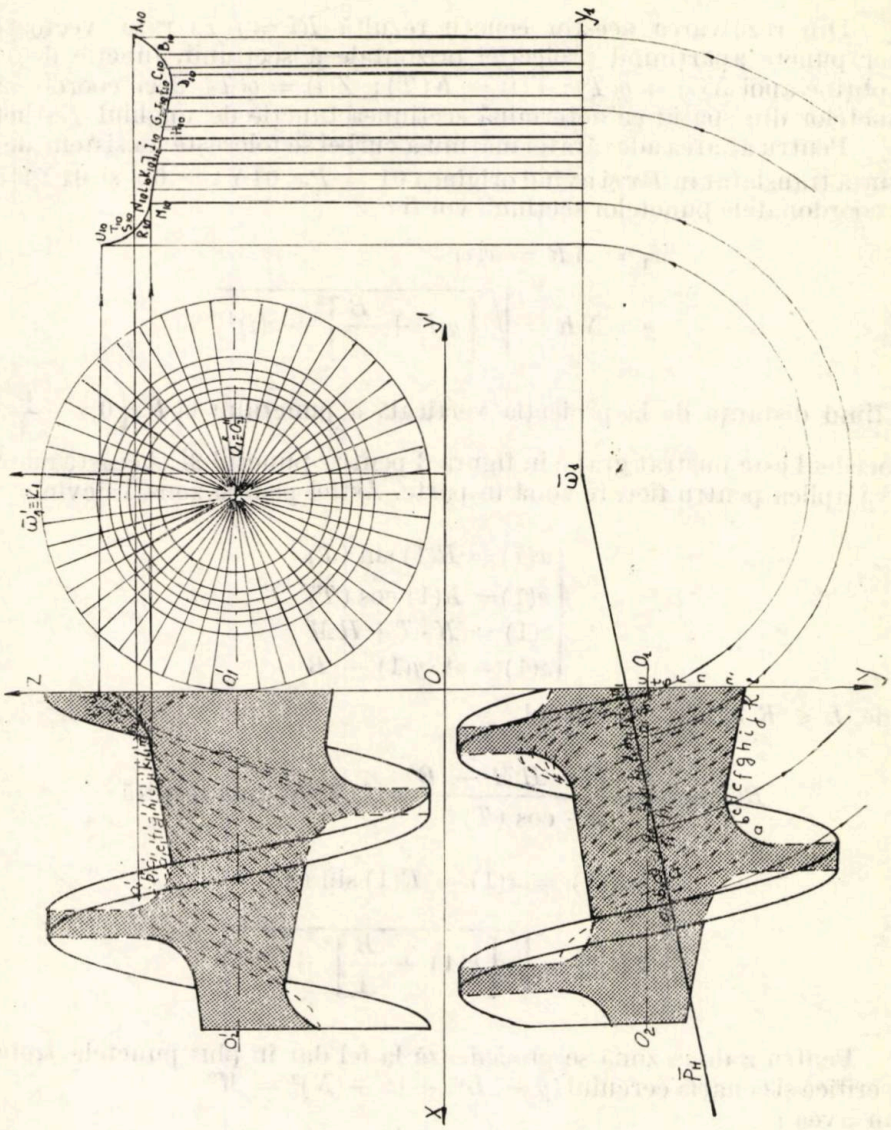


Fig. 2

unde variabilele au semnificația din figura 3 iar $i < 1, 2, 3$ corespunde apartenenței la una din zonele menționate mai sus.

Punctele vor satisface și ecuația planului de secțiune proiectant pe lateral:

$$Z = A \cdot y + B$$

unde:

$$A = \pi \cdot 100/p$$
$$B = p/4 + HM/2$$

Din rezolvarea acestor ecuaţii rezultă $Ri = f(T)$ raza vectoare a unor puncte aparţinînd proiecţiei orizontale a secţiunii, funcţie de care se obţine apoi $X(i) = g(T)$; $Y(i) = K(T)$; $Z(i) = q(T)$ deci coordonatele punctelor din spaţiu ce determină secţiunea funcţie de unghiul T (theta).

Pentru aflarea adevăratei mărimi a curbei se foloseşte un sistem de referinţă translatat în Px şi avînd originea $01 = Px$, $\overline{01Y1} = \overline{0Y}$ şi $\overline{01X1} \,||\, 0x$ iar coordonatele punctelor secţiunii vor fi :

$$\bar{x}_1 = XR = x(i)$$

$$\bar{y} = YR = \sqrt{\left[y(i) + \frac{B}{A}\right]^2 + z(i)^2}$$

$\bar{y}_1$ fiind distanţa de la proiecţia verticală a punctului la $Px\left(0, -\frac{B}{A}, 0\right)$

Procedeul este ilustrat grafic în figura 3 pentru punctul M. Această metodă se va aplica pentru fiecare zonă în parte. Astfel pentru zona I devin :

$$\begin{cases} x(1) = R(1) \sin(T) \\ y(1) = R(1) \cos(T) \\ z(1) = K \cdot T + HM \\ z(1) = A \cdot y(1) + B \end{cases}$$

unde $L \leqslant R \leqslant R_{max}$ rezultînd

$$R(1) = \frac{K \cdot T + HM - B}{A \cdot \cos(T)} = f_1(T)$$ şi apoi rezultă

$$\begin{cases} XR(1) = x(1) = R(1) \sin(T) \\ YR(1) = \sqrt{\left[y(1) + \frac{B}{A}\right]^2 + z^2(1)} \end{cases}$$

Pentru a doua zonă se procedează la fel dar în plus punctele trebuie să verifice şi ecuaţia cercului $(y - L)^2 + (z - N)^2 = M^2$

Vom avea :

$$\begin{cases} x(2) = R(2) \sin(T) \\ y(2) = R(2) \cos(T) \\ z(2) = K \cdot T + Z_0 \\ z(2) = A \cdot y(2) + B \\ [R(2) - L]^2 + [Z_0 - N]^2 = M^2 \Rightarrow Z_0 = E = N + \sqrt{M^2 - [R(2) - L]^2} \end{cases}$$

Din ultimele trei ecuaţii se obţin $R(2) = f_2(T)$

$$R^2(2) + 2\frac{A \cdot F \cos(T) - L}{NN} R(2) + \frac{F^2 + L^2 - M^2}{NN} = 0$$

unde :

$$F = B - N + K \cdot T$$
$$NN = A^2\cos^2(T) + 1$$

notînd

$$PP = \frac{A.F.\cos(T) - L}{N}$$
$$Q = \frac{F^2 + L^2 - M^2}{N}$$

rezultă :

$$R^2(2) + 2(PP)R(2) + Q = 0$$
$$D = PP^2 - Q$$
$$R(2)_{12} = -PP \pm \sqrt{D}$$

Se observă că pentru o valoare a lui T se obțin două valori pentru $R(2)$ și anume $R(2)_1 > R(2)_2$ ceea ce se poate urmări și pe proiecția orizontală a curbei de secțiune din fig. 3.

Pentru a mătura curba pe porțiunea $C2F2$ trebuie să se ia valoarea $R(2)1 > R(2)_2$ și să se micșoreze T pînă atinge minimul pentru $D < 0$ după care, se va lua pentru $R(2)$ valoarea $R(2)_2$ și apoi se va mări T pînă cînd $R(2) = RMIN$. Apoi se trece la zona următoare. Se obțin în consecință coordonatele punctelor rabătute :

$$\begin{cases} XR(2) = x(2) \\ YR(2) = \sqrt{\left[y(2) + \dfrac{B}{A}\right]^2 + z(2)^2} \end{cases}$$

Pentru zona a III secțiunea se reduce la cea obținută printr-un cilindru proiectant pe planul orizontal de proiecție. Ecuațiile vor fi :

$$\begin{cases} R(3) = R_{MIN} \\ x(3) = R(3)\sin(T) \\ y(3) = R(3)\cos(T) \\ z(3) = A \cdot y(3) + B \end{cases}$$

Iar coordonatele punctelor rabătute sînt :

$$\begin{cases} XR(3) = x(3) \\ YR(3) = \sqrt{\left[y(3) + \dfrac{B}{A}\right]^2 + z(3)^2} \end{cases}$$

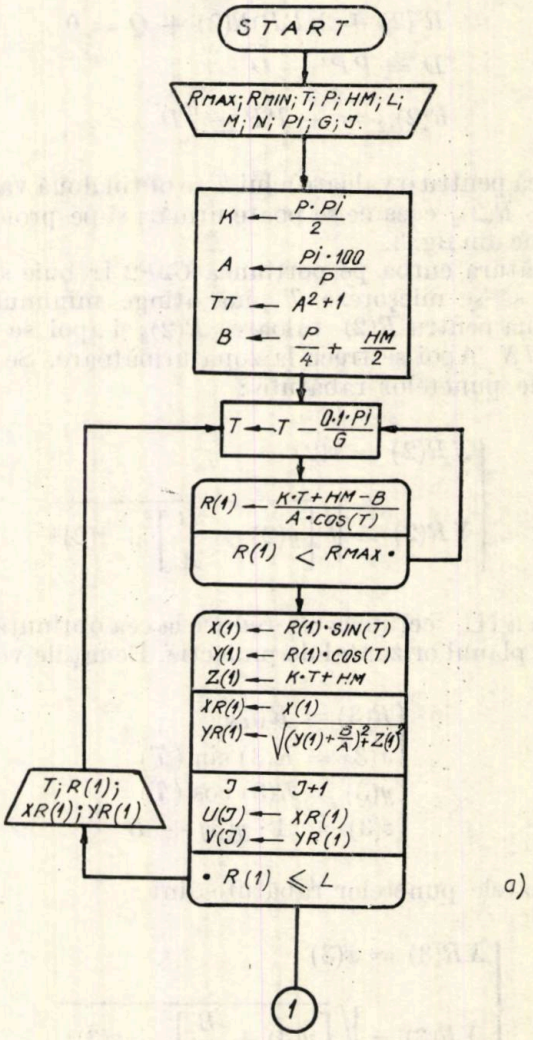
Se variază T pînă se obţine $T = \pi/2$

S-au obţinut jumătate din punctele curbei de secţiune. Pentru cealaltă jumătate se vor lua simetricele punctelor în raport cu o axă de simetrie aflată la depărtarea

$$S = \frac{B}{A}\sqrt{A^2 + 1}$$

de 01 $= Px$ şi atunci pentru punctele sim etrice coordonatele vor fi :

$$\begin{cases} XS(\mathrm{i}) = XR(\mathrm{i}) \\ YS(\mathrm{i}) = 2S - YR(\mathrm{i}) \end{cases}$$



a)

Fig. 5

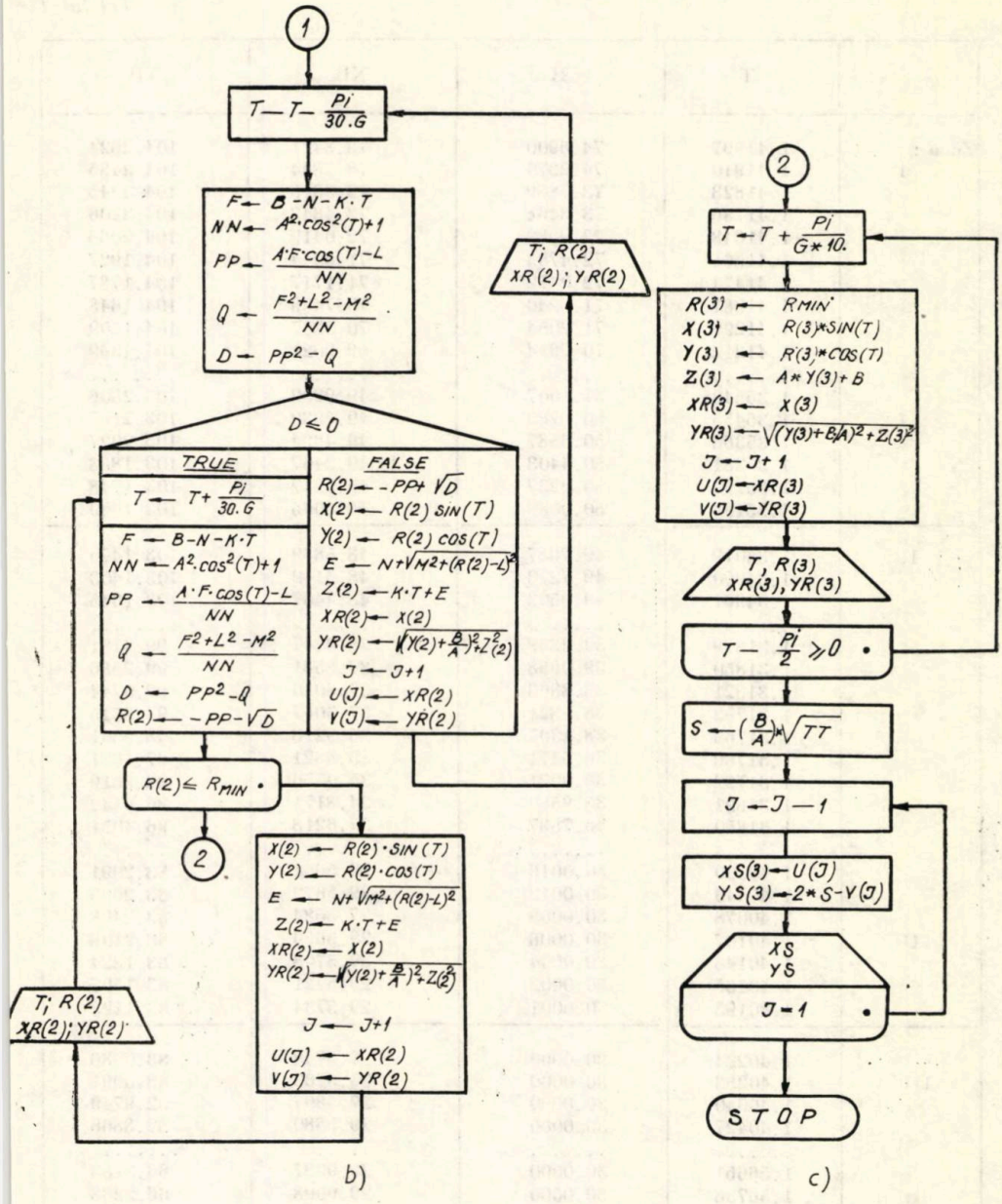


Fig. 5

Pornind de la aceste premize matematice s-a elaborat organigrama din fig. 5 ce permite elaborarea unui program de calcul care rulat pe un minisistem de calcul „Coral" a dat coordonatele (XR, YR) ale punctelor adevăratei mărimi a secțiunii (tabelul 1) determinată de planul normal în elicoidul considerat.

Tabelul 1

	T	R	XR	YR
Zona :	1.41997	74.6900	73.8421	104.2624
I	1.41910	74.2370	73.3844	104.2485
	1.41823	73.7889	72.9318	104.2345
	1.41736	73.346ε	72.4843	104.2206
	1.41648	72.9082	72.0419	104.2066
	1.41561	72.4753	71.6044	104.1927
	1.41474	72.0472	71.1717	104.1787
	1.41387	71.6240	70.7439	104.1648
	1.41299	71.2054	70.3207	104.1509
	1.41212	70·7914	69.9021	104.1369
	.....	.....	.....	.....
	1.35543	51.1007	49.9202	103.2306
I	1.35455	50.8789	49.6939	103.2167
	1.35368	50.6587	49.4694	103.2027
	1.35281	50.4403	49.2467	103.1888
	1.35194	50.2237	49.0257	103.1748
	1.35106	50.0089	48.8065	103.1609
II	1.35019	49.7957	48.5889	103.1470
	1.34990	49.7223	48.5142	103.1403
	1.34961	49.6503	48.4407	103.1345
	.....	.....	.....	.....
	1.31879	39.2369	38.0847	99.4181
	1.31850	39.0958	37.8581	99.2586
	1.31821	38.8363	37.6040	99.0744
	1.31792	38.5321	37.3067	98.8515
	1.31763	38.1307	36.9213	98.5501
	1.31763	36.5471	35.3821	97.1881
	1.31792	36.2071	35.0556	96.8619
	1.31821	35.9580	34.8171	96.6142
	1.31850	35.7537	34.6218	96.4051
	.....	.....	.....	.....
	1.40020	30.0016	29.5661	83.2991
	1.40049	30.0012	29.5672	83.2695
	1.40078	30.0009	27.5684	83.2408
II	1.40107	30.0006	29.5696	83.2108
	1.40146	30.0004	29.5708	83.1824
	1.40165	30.0002	29.5721	83.1507
	1.40195	30.0001	29.5734	83.1193
	1.40224	30.0000	29.5748	83.0986
III	1.40253	30.0000	29.5763	83.0691
	1.40340	30.0000	29.5807	82.9749
	1.40427	30.0000	29.5880	82.8866
	.....	.....	.....	.....
	1.56651	30.0000	29.9997	66.3183
	1.56738	30.0000	29.9998	66.2288
	1.56826	30.0000	29.9999	66.1393
III	1.59613	30.0000	30.0000	66.0498
	1.570000	30.0000	30.0000	65.9603
		J	XS	YS
		676	30.0000	65.7074
		677	29.9999	65.6179
		675	29.9998	65.5284

(continuare tabelul 1)

		J	XS	YS
		674	29.9997	65.4389
		673	29.9996	65.3494
		672	29.9995	65.2599
		671	29.9993	65.1704
		...	.....	.....
		8	70.7439	27.5924
		7	71.1717	27.5785
		6	71.6044	27.5645
V		5	72.0419	27.5506
		4	72.4843	27.5366
		3	72.9318	27.5227
		2	73.3844	27.5088
		1	73.8421	27.4948

Obţinerea acestor date a permis trasarea grafică a profilului din fig. 6 pe o instalaţie plotter Calocomp.

Metoda grafică de determinare a unor secţiuni plane prin elicoizi este o metodă proprie şi a permis determinarea profilului sculei de prelucrat, într-o primă etapă în limitele aproximării grafice.

Profilul obţinut, deşi mult mai puţin precis decît cel trasat de plotter a facilitat rezolvarea matematică a problemei permiţînd să se stabilească precis modul de variaţie a unghiului θ(T) obţinîndu-se şi forma curbei de secţiune în limitele aproximării grafice.

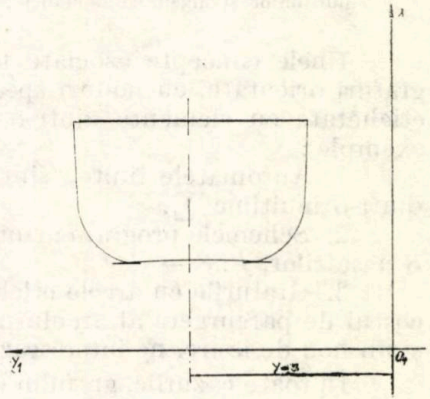


Fig. 6

Rezolvarea problemei pe calculator asigură o precizie maximă în condiţiile obţinerii coordonatelor punctelor secţiunii cu precizia dorită.

Această metodă s-a aplicat pentru realizarea prin frezare a melcului transportor fig. 1 din cadrul instalaţiei de producere a pastelor făinoase medii.

BIBLIOGRAFIE

1. *J. Moncea*, Geometrie descriptivă, Ed. tehnică, 1983
2. *C. Minciu*, Proiectarea sculelor aşchietoare, Ed. Tehnică, 1980

Computer-Aided Graphical and Analytical Method of Determining Helicoid Sections

The milling of conveying worms requires a section with a plane normal to the mean helix for obtaining the cutter profile. A graphical method is suggested for determining these sections, a method which is then solved analytically and graphically by means of the computer.

CZ: 519.17.
519.1

GRAFURI ETICHETATE ȘI VALORI ASOCIATE ACESTORA

D. SUCIU*

În această lucrare investigăm o consecință a substituirii unei muchii a unui graf orientat, etichetat cu elemente ale unei mulțimi date A cu un alt graf etichetat. În mod natural este pusă în evidență o monadă în categoria mulțimilor și algebrele monadei asociate sînt caracterizate complet.

Unele concepte asociate teoriei calculatoarelor sînt modelate prin grafuri orientate, cu noduri speciale de intrare și de ieșire, avînd arcele etichetate cu elemente dintr-o mulțime A. Să considerăm următoarele exemple:

1. Automatele finite: sînt grafuri cu arcele etichetate cu elemente dintr-o mulțime $\sum$.

2. Schemele program: sînt grafuri etichetate cu funcții pe mulțimea S a stărilor, $f: S \to S$.

3. Grafurile cu arcele etichetate cu numere naturale care reprezintă costul de parcurgere al arcului respectiv; avînd fixate un nod de intrare și un nod de ieșire, ne interesează costul unei călătorii între cele 2 noduri.

În toate cazurile, grafului etichetat i se asociază o *valoare* care reprezintă comportarea globală a grafului și în calculul căreia intervine în mod esențial o structură algebrică pe mulțimea etichetelor: este convenabil să considerăm că valoarea grafului aparține tot mulțimii A astfel încît vom lua în primul exemplu $A = \mathcal{P}(\sum^*)$, în al 2-lea $A = \mathrm{Rel}(S, S)$ (mulțimea relațiilor pe S) iar în al 3-lea $A = \omega$. Structura algebrică a mulțimii A în cele 3 cazuri seamănă foarte mult.

Problema pe care ne-am pus-o este de a studia structura algebrică care apare pe mulțimea A atunci cînd fiecărui graf finit i se asociază o valoare, într-un mod rezonabil.

Definiție. Vom numi graf cu o intrare și o ieșire, un graf orientat $G = (V, E, s, t)$ care, fie este vid ($V = \Phi$ și $E = \Phi$) fie are 2 noduri evidențiate i, $0 \in V$ $i \neq 0$ astfel încît orice nod $v \in V$ se află pe un drum de la i la 0. Vom nota cu $G\Phi$ graful vid.

Definiție. Fie A o mulțime; un graf etichetat cu elemente din A este o pereche $(G, 1)$ unde $G = (V, E, s, t)$ este un graf cu o intrare și o ieșire, iar $1: E \to A \cup \{1\!\!1\}$ este o funcție care atașează fiecărui arc, fie un element din A, fie un simbol special $1\!\!1$.

* Asist., catedra Calculatoare.

Automatele finite peste A cu tranziții spontane sînt cuprinse în această noțiune, dacă au o intrare și o ieșire.

Pentru fiecare clasă de grafuri etichetate cu elemente din A izomorfe vom alege cîte un reprezentant alcătuind astfel o mulțime pe care o vom nota $S_N(A)$. Notăm cu $\sigma\Phi \in S_N(A)$ graful etichetat vid $\sigma\Phi = (G\Phi, \Phi)$.

Propoziție. S_N se poate extinde la un functor S_N : Set $\to$ Set.

Fie $\sigma, \sigma' \in S_N(A)$ și e un arc a lui σ (i.e. $\sigma = (G, 1)$ și e este un arc al lui G); putem substitui arcul e cu întregul graf σ' astfel : eliminăm din σ arcul e și eticheta sa, apoi suprapunem nodul de intrare al lui σ' cu nodul sursă al arcului e și nodul de ieșire al lui σ' cu nodul destinație al arcului e; în cazul în care σ' este chiar graful vid $\sigma\Phi$, substituția constă doar din eliminarea arcului e și în acest caz vom elimina în continuare toate nodurile care nu se mai află pe un drum de la nodul de intrare la cel de ieșire. Graful obținut din σ prin substituția lui e cu σ' îl vom nota $\sigma[e/\sigma']$ ($\in S_N(A)$).

Cînd asociem cîte o valoare din A fiecărui graf etichetat $\sigma \in S_N(A)$ construim, de fapt, o funcție $\theta : S_N(A) \to A$. Vom numi o asemenea funcție acceptabilă dacă satisface următoarea proprietate : $\forall \sigma \in S_N(A)$, dacă e este un arc al lui σ și $a \in A$ eticheta lui e, atunci pentru orice $\sigma' \in S_N(A)$ pentru care $\theta(\sigma') = a$ să avem $\theta(\sigma) = \theta(\sigma[e/\sigma'])$. Adică valoarea unui graf să nu se schimbe dacă substituim un arc al său cu un alt graf care are aceeași valoare ca și arcul substituit.

Vom construi o monadă pornind de la S_N. Pentru o mulțime A fixată notăm $\eta_A : S \to A_N(A)$ funcția definită astfel : $\forall a \in A$ $\eta_A(a)$ este graful cu un nod de intrare i, un nod de ieșire o și un unic arc $i \to 0$ etichetat cu a. De asemenea notăm cu $\mu_A : S_N(S_N(A)) \to S_N(A)$ funcția definită astfel : $\forall \sigma \in S_N(S_N(A))$ $\mu_A(\sigma)$ este graful din $S_N(A)$ obținut prin substituția tuturor arcelor din σ cu etichetele acestora (care sînt grafuri din $S_N(A)$).

Propoziție. (S_N, η_N, μ_N) este o monadă în Set.

Interesul în această monadă este stîrnit de următorul fapt :

Propoziție. O funcție $\theta : S_N(A) \to A$ este acceptabilă dacă și numai dacă (A, θ) este o S_N-algebră.

Pentru a încerca să caracterizăm S_N-algebrele, fixăm un domeniu de operatori $R = \{0, 1, +, \cdot, *\}$ cu aritățile 0, 0, 2, 2, 1. Atunci fiecărei S_N-algebre (A, θ) îi corespunde în mod canonic o structură de R-algebră pe A astfel : $0 = \theta(\sigma\Phi)$; $1 = \theta(\sigma 1)$ unde $\sigma 1$ este graful cu un nod de intrare i, un nod de ieșire o și un unic arc $i \to 0$ etichetat cu $\mathbb{1}$; pentru $a, b \in A$ $a + b = \theta(\sigma_1)$ unde σ_1 are 2 arce $i \to 0$ etichetate cu a respectiv b; $a \cdot b = \theta(\sigma_2)$ unde σ_2 are 3 noduri $i, x, 0$ și 2 arce; unul $i \to x$ etichetat cu a, altul $x \to 0$ etichetat cu b; $a^* = \theta(\sigma_3)$ unde σ_3 are 3 noduri $i, x, 0$ și 3 arce : primul $i \to x$ etichetat cu $\mathbb{1}$, al 2-lea $x \to x$ etichetat cu a, al 3-lea $x \to 0$ etichetat cu $\mathbb{1}$.

Cîteva identități în noua R-algebră se pot demonstra ușor : $a + b = b + a$, $a + 0 = a$, $a0 = 0a = 0$ $(a + b) + c = a + (b + c)$. Dar 1 nu este elementul neutru al înmulțirii pentru că nu am dat încă nici un sens simbolului 1 cu care pot fi etichetate unele din arcele grafurilor.

Vom defini pe $S_N(A)$ o relație de echivalență $\equiv_A$ astfel : pornim de la o schemă $\sigma \in S_N(A)$ și de la un arc $e : x \to y$ al său etichetat cu $\mathbb{1}$ astfel încît $x \neq y$ și $x \neq i$ (x nu este nodul de intrare). Dorim să eliminăm arcul e efectuînd modificări în σ dar astfel încît pentru orice $\theta : S_N(A) \to A$

pentru care 1 este element neutru pentru înmulțire, valoarea grafului modificat să dorim să fie aceeași cu $\theta(\sigma)$. Un mod rezonabil este următorul pentru fiecare arc care se termină în x, $\varepsilon : u \to x$, introducem o nouă copie $\varepsilon : u \to y$ etichetat tot cu eticheta lui ε. Apoi eliminăm arcul e și, dacă nic un drum $i \to 0$ nu mai trece prin x, eliminăm și nodul x. Fie σ' grafu astfel obținut : notăm cu $\sigma \xrightarrow{t} \sigma'$ faptul că σ' a fost obținut din σ printr-o astfel de construcție.

Dacă $e : x \to y$ este un arc al lui σ etichetat cu $\mathbb{1}$, astfel încît $x \neq y$ și $y \neq 0$, atunci îl putem elimina în mod dual : dublăm fiecare arc $\varepsilon : y \to u$ cu un arc $\varepsilon' : x \to u$ cu aceeași etichetă, apoi eliminăm e și, eventual, y Dacă σ'' este graful obținut, notăm $\sigma \xrightarrow{s} \sigma''$.

În multe instanțe concrete ale grafurilor etichetate și funcții θ (automate finite, scheme program), σ, σ' și σ'' au întotdeauna aceeași valoare. De aceea căutăm o relație de echivalență $\equiv_A$ astfel încît $\sigma \equiv_A \sigma'$ și $\sigma \equiv_A \sigma''$

Propoziție. Există un sistem minimal de relații de echivalență $\equiv$ ($\equiv_A$ pentru fiecare mulțime A), astfel încît :

1. $\forall \sigma, \sigma' \in S_N(A)$ dacă $\sigma \xrightarrow{s} \sigma'$ sau $\sigma \xrightarrow{t} \sigma'$ atunci $\sigma \equiv_A \sigma'$.
2. Dacă notăm cu $S(A) = S_N(A)/\equiv_A$ atunci monada (S_N, η_N, μ_N) induce o nouă monadă (S, η, μ).

Sîntem așadar interesați în S-algebrele (A, θ)

Teoremă. S-algebrele (A, θ) sînt totuna cu acele R-algebre pe mulțimea A care satisfac următoarele 10 ecuații :

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + y = y + x$
3. $x + 0 = x$
4. $(xy)z = x(yz)$
5. $x1 = 1x = x$
6. $x0 = 0x = 0$
7. $x(y + z) = xy + xz \quad (y + z)x = yx + zx$
8. $1 + x^*x = x^*$
9. $x(yx)^* = (xy)^*x$
10. dacă notăm $x/y = x(yx)^* = (xy)^*x$ atunci : $(x + y)^* = x^*/y$

BIBLIOGRAFIE

1. *E. G. Manes*, Algebraic Theories, Springer-Verlag, 1976.
2. *S. Mac Lane*, Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, 1971.
3. *V. Breazu, O. Stănășilă*, A Generalization of Kleene's Theorem and Nondeterministic Structured Programming, Information and Control 1983.

Labeled Graphs and Values Associated to Them

In this paper we investigate a consequence of substituting an edge of a directed graph, labeled with elements of a given set A, with another labeled graph A monad in set arises in a natural way and the algebras of a related monad are fully characterized.

C.Z.: 532.12
517.9

ASUPRA UNEI METODE DE SIMULARE HIDRAULICĂ A CURGERILOR COMPRESIBILE UNIDIMENSIONALE, PRIN INJECȚIE DE APĂ

V. PIMSNER, V. STANCIU *

Lucrarea de față își propune să stabilească o modalitate de simulare hidraulică a curgerii unidimensionale incompresibile, prin injecție de apă în canalul hidrodinamic. Pe baza acesteia se poate studia curgerea supersonică în ajutaje de reacție, în dispozitive de admisie supersonice, precum și în rețele axiale de compresor supersonic.

Introducere

Analogia hidraulică are la bază asemănarea ecuațiilor ce caracterizează curgerea compresibilă unidimensională sau bidimensională ideală, cu ecuațiile de mișcare ale fluidelor incompresibile, în straturi subțiri, în canale deschise cu suprafață liberă.

Saltul de presiune în curgerea fluidelor compresibile corespunde cu saltul de greutate în curgerea lichidelor, adică, undele de compresiune sau expansiune se compară cu adîncimea peliculei de lichid, cu valurile din hidrodinamică.

1. Ecuațiile curgerii unidimensionale generalizate a fluidelor compresibile

La baza curgerii unidimensionale generalizate a fluidelor compresibile stau următoarele ecuații:

a) Ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot A \cdot q) = 0 \tag{1}$$

b) Ecuația de moment:

$$\left.\frac{\mathrm{d}(M \cdot q)}{\mathrm{d}t}\right|_{v.c.} + \dot{M}_2(q + \mathrm{d}q) - \dot{M}_1 \cdot q = -A \cdot \mathrm{d}\rho - \rho \cdot A \cdot g \cdot \mathrm{d}z \tag{2}$$

* Prof. dr. docent, Șef lucrări dr. ing., catedra Aeronave

în care M reprezintă masa de fluid care se află în interiorul volumului de control considerat, iar $\dot{M}_1$ și $\dot{M}_2$ sînt debitele de fluid, care pătrund sau părăsesc acest volum.

c) Ecuația energiei :

$$\delta Q - \delta W_0 = \dot{M}_2 \left[i + \mathrm{d}i + \frac{(q + \mathrm{d}q)^2}{2} + g(z + \mathrm{d}z) \right] - \dot{M}_1 \left[i + \frac{q^2}{2} + g \cdot z \right] \tag{3}$$

în care Q și δW_0 sînt repsectiv căldura introdusă în fluid și lucrul mecanic primit din exterior, iar i entalpia statică a fluidului.

d) Ecuația de stare :

$$p = \rho \cdot R \cdot T \tag{4}$$

Mărimile care intervin în relațiile (1—4) au semnificație cunoscută :
— $\vec{q}$, viteza fluidului ;
— ρ, p, T, densitatea, presiunea și temperatura statică a fluidului ;
— A, aria secțiunii de trecere a fluidului.

În condițiile în care curgerea se consideră staționară, iar i^* reprezintă entalpia frînată a fluidului, $i^* = i + \frac{q^2}{2}$, atunci sistemul se poate exprima astfel :

$$\begin{cases} \dot{M} = \rho \cdot A \cdot q \\ \mathrm{d}p + \rho \cdot g \cdot \mathrm{d}z + \frac{\rho}{2} \cdot \mathrm{d}q^2 = 0 \\ \delta Q - \delta W = \mathrm{d}i^* + g \cdot \mathrm{d}z \\ p = \rho R T \end{cases} \tag{5}$$

Ținînd seama că $q^2 = kRTM^2$, în care M reprezintă numărul Mach, ecuațiile sistemului se pot scrie sub formă diferențială :

$$\frac{\mathrm{d}\dot{M}}{\dot{M}} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}q}{q} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{q} = \frac{\mathrm{d}M}{M} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{8}$$

Eliminînd densitatea și temperatura din ecuația (7) se obține :

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = - \frac{k \cdot M^2}{1 + k \cdot M^2} \left(\frac{\mathrm{d}M^2}{M^2} + \frac{\mathrm{d}A}{A} \right) \tag{9}$$

Pe de altă parte, eliminînd presiunea și ținînd seama de ecuația energiei sub formă diferențială

$$\frac{dT}{T} = \frac{dT^*}{T^*} - \frac{k-1}{2} \cdot \frac{dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \tag{10}$$

rezultă relația :

$$\frac{dM^2}{M^2} = - \frac{2\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}{1 - M^2} \cdot \frac{dA}{A} + \frac{(1 + k\,M^2)\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}{1 - M^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{dT^*}{T^*} + \frac{2\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}{1 - M^2} \cdot \frac{d\dot{M}}{\dot{M}} \tag{11}$$

Relațiile diferențiale (9) și (11), sînt fundamentale în studiul curgerii unidimensionale, compresibile fără frecare.

2. Ecuațiile curgerii unidimensionale, staționare a lichidelor în straturi subțiri în canale cu suprafață liberă

În condițiile în care densitatea fluidului este constantă $\rho = \rho_0$ iar presiunea statică în pelicula de lichid variază după legea hidrostatică ;

$$p_a = p + \rho_0 \cdot g \cdot H \tag{12}$$

în care p_a este presiunea atmosferică și H înălțimea peliculei de apă, sistemul de ecuații (6—8) conduce la :

$$\frac{d\dot{M}}{\dot{M}} \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} \tag{13}$$

$$\frac{dp}{p} = \rho_0 \cdot g \cdot \frac{dH}{H} \tag{14}$$

Dacă se consideră curgerea într-un canal de secțiune $A = B \cdot H$, în care B reprezintă lățimea sa, atunci :

$$\frac{dA}{A} = \frac{dB}{B} + \frac{dH}{H} \tag{15}$$

În aceste condiții, eliminînd debitul, presiunea și aria, din ecuația de moment se obține relația diferențială :

$$\frac{dH^2}{H^2} = - \frac{2F^2}{1 + 2F^2}\left(\frac{dF^2}{F^2} + \frac{dB}{B}\right) \tag{16}$$

în care F reprezintă numărul Froude, definit prin :

$$F^2 = \frac{V^2}{g \cdot H} \tag{17}$$

Pe baza relației (16) ecuația de debit conduce la :

$$\frac{dF^2}{F^2} = -\frac{2 + F^2}{1 - F^2} \cdot \frac{dB}{B} + \frac{2(1 + 2F^2)}{1 - F^2} \cdot \frac{d\dot{M}}{\dot{M}} \tag{18}$$

Relațiile (16) și (18) stau la baza studiului curgerii lichidelor în stratur ubțiri, în canale deschise cu suprafață liberă.

3. Bazele analogiei hidraulice

Comparînd ecuațiile (9) și (16), sau (11) și (18), se constată o anumit corespondență între termeni dacă $M = F$. Deci

$$p = H^2, A = B \text{ și } T^* = \dot{M} \tag{19}$$

Această corespondență dintre mărimile prezentate, stă la baza analogi dintre cele două curgeri, curgerea fluidelor incompresibile în strat subțir cu suprafața liberă, în canale dreptunghiulare și curgerea compresibilă unui fluid ipotetic cu constantă adiabatică $k = 2$. Din similitudinea sta bilită rezultă posibilitatea simulării creșterii de temperatură a fluidul compresibil, ca rezultat al încălzirii prin adaos de apă în curgerea incompr sibilă.

O analiză mai în detaliu a ecuațiilor curgerii unidimensionale ofer posibilitate modificării exponentului adiabatic echivalent k, în sens apropierii lui de valorile reale ale exponentului adiabatic, caracteristic curg rii compresibile a gazelor biatomice $k = 1{,}4$.

4. Simularea hidraulică a exponentului adiabatic k

În general curgerea compresibilă izentalpică ($T^* = \text{ct}$), se caracter zează prin :

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{2 + (k - 1)M^2}{M^2 - 1} \cdot \frac{dA}{A} \tag{2}$$

iar curgerea incompresibilă în canale deschise prin expresia (18). În expr sia (18), ultimul termen ia în considerație influența lățimii canalului B a debitului de lichid injectat în canal, $\dot{M}$, fie în sensul de curgere, fie norm pe peretele lateral al canalului sau prin fundul canalului. În condițiile exi

enței analogiei deci $M=F$, rezultă prin egalarea relațiilor (20) și (18) expresia exponentului adiabatic echivalent:

$$k = 1 + \frac{1}{\frac{dA}{A}}\left(\frac{dB}{B} - 4\cdot\frac{d\dot{M}}{\dot{M}}\right) + \frac{\frac{2}{F^2}}{\frac{dA}{A}}\left(\frac{dB}{B} - \frac{d\dot{M}}{\dot{M}} - \frac{dA}{A}\right) \qquad (21)$$

Această relație permite stabilirea condițiilor necesare ca exponentul adiabatic să nu depindă de numărul Froude.

$$\frac{dB}{B} = \frac{d\dot{M}}{\dot{M}} + \frac{dA}{A} \qquad (22)$$

Rezultă prin urmare, expresia exponentului adiabatic k:

$$k = 1 + \frac{1}{\frac{dA}{A}}\left(\frac{dB}{B} - 4\cdot\frac{d\dot{M}}{\dot{M}}\right) \qquad (23)$$

Ținînd seama de condiția (22), exponentul adiabatic devine:

$$k = 2 - 3\cdot\frac{d\dot{M}}{\dot{M}} : \left(\frac{dB}{B} - \frac{d\dot{M}}{\dot{M}}\right) \qquad (24)$$

Această relație, evidențiază cele două modalități de simulare hidraulică a exponentului adiabatic.

a) Modificarea geometriei canalului hidraulic;

b) Modificarea debitului de apă din canal, prin injecție. Relațiile (22) și (24) conduc la următoarele concluzii deosebit de interesante:

a) Dacă debitul de apă în canal este constant, adică $\frac{d\dot{M}}{\dot{M}} = 0$, atunci:

$$\frac{dB}{B} = \frac{dA}{A} \text{ și } k = 2.$$

Se regăsesc condițiile analogiei hidraulice în canalul hidraulic de secțiune dreptunghiulară, fără injecție de apă;

b) Există posibilitatea combinațiilor între forma canalului și debitul injectat, astfel încît să se obțină orice valoare a exponentului adiabatic. Pentru $k = \frac{7}{5}$, rezultă

$$\frac{dB}{B} = 6\cdot\frac{d\dot{M}}{\dot{M}}$$

Prin urmare :

$$\frac{d\dot{M}}{\dot{M}} = 0{,}2 \cdot \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dB}{B} = 1{,}2 \cdot \frac{dA}{A}.$$

Ţinînd seama că variaţia ariei ajutajului în care are loc curgerea compresibilă este cunoscută, se pot stabili legile de variaţie a lăţimii canalului, precum şi a debitului injectat de direcţia de curgere :

$$\begin{cases} B(x) = [A(x)]^{1,2} \cdot C_B \\ \dot{M}(x) = A(x)]^{0,2} \cdot C_M. \end{cases} \tag{26}$$

unde constantele C_B şi C_M se determină din condiţii iniţiale.

5. Stabilirea parametrilor curgerii compresibile

Pe baza ecuaţiilor presiunii p, şi ale înălţimii peliculei de apă din canal H se pot stabili următoarele condiţii de analogie :

$$p \Rightarrow H^{\frac{3k}{k+1}}; \quad \rho \Rightarrow H^{\frac{3}{k+1}}; \quad T \Rightarrow H^{\frac{3(k-1)}{k+1}}. \tag{27}$$

În situaţia în care $k = \frac{7}{5}$, se obţin relaţiile de analogie :

$$\frac{p}{P^*}\left(\frac{H}{H}\right)^{\frac{7}{4}} C_p; \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{5}{4}} \cdot C_q; \frac{T}{T^*} = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot C_T, \tag{28}$$

H_0 fiind înălţimea apei neperturbate, iar C_p, C_ρ C_T constante. Pe baza acestor constatări, se poate studia prin analogie hidraulică destinderea gazelor în lungul unui ajutaj Laval. Problemele privind realizarea practică a canalului hidraulic, se pot rezolva prin utilizarea unor pereţi poroşi care să asigure prin injecţie debitul de apă necesar, conform legii stabilite apriori.

BIBLIOGRAFIE

1. *S. Boraas*, A I A A Journal, Vol. 16, Nr. 6, 1978.
2. *E. Carafoli*, Aerodinamica vitezelor mari, fluide compresibile, Ed. Academiei, 1957.
3. *W. H. Loh*, Jour, Franklin Inst. Vol. 269, Nr. 1, 1960.
4. *I. V. Wehausen*. „Surface Waves", Handbuck der Physik, Vol. 9, Springer — Verlag, Berlin 1960.

On a Method of Hydraulic Simulation of Unidimensional Compresible Flows, by Means of Water Injection

The present paper aims to establish a method of hydraulic simulation of compresible undimensional flows, by means of water injection into the hydrodynamic canal. The method provides a basis for the study of the supersonic flow in exhaust nozzles, supersonic inlets and axial cascades of a supersonic compressor.

C.Z.: 629.7
621.316.7
62–55

REGULATORUL ÎN TIMP DISCRET ECHIVALENT CU REGULATORUL ÎN TIMP CONTINUU

N. RACOVEANU *

Dîndu-se un regulator K pentru un sistem constant (A, B) în timp continuu, se caută un regulator K în timp discret care realizează aceleaşi stări x în punctele $i = 1, 2, 3, \ldots$, ca şi sistemul în timp continuu $A + BK$.

Considerăm sistemul

$$Dx = Ax + Bu + x_0\delta \tag{1}$$

unde A este o matrice reală, cu n linii şi n coloane, B o matrice reală cu n linii şi m coloane, D derivarea în sens distribuţii, δ distribuţia Dirac, x_0 saltul lui x la $t = 0$, x starea, u comanda. Calculele se fac în D'_+.

Să presupunem că s-a calculat un regulator prin alocare de poli-zerouri, sau un regulator optimal, sau prin orice alt procedeu, astfel încît regulatorul satisface specificaţii date. Fie deci

$$u = Kx \tag{2}$$

Răspunsul sistemului reglat este

$$x(t) = he^{(A+BK)t}\, x_0 \tag{3}$$

unde h este treapta Heaviside.

În locul regulatorului în timp continuu se realizează o schemă hibridă cu convertoare AD şi DA şi calculator numeric. Starea este dată în forma

$$x_i = x(iT); \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Se cere să se calculeze comanda de forma

$$u = \sum_{j=1}^{N} u_j(h_j - h_{j+1}); \qquad iT \leqslant t \leqslant (i+1)\,T \tag{4}$$

---

* Prof. dr. ing., catedra Aeronave

unde u_j sînt vectori constanți, care în fiecare punct iT să realizeze starea dată de (3)

$$x_i = e^{(A+BK)iT} x_0 = e^{(A+BK)T} x_{i-1}$$

Cu alte cuvinte, comanda căutată pe un interval $iT(i+1)\ T$ este zero pentru $j = 0$ și este constantă pentru fiecare interval $j = 1, 2, 3, \ldots$ Avem deci

$$t_i = t_{i,0}; \qquad t_{i+1} = t_{i,N+1}; \qquad t_{i+1} - t_i = T.$$

Intervalul $j = 0$, $j = 1$ este utilizat ca timp necesar calculului comenzii, astfel încît prima comandă apare pentru $j = 1$.

Cu comanda de forma (4) răspunsul sistemului (1) este

$$x(t) = he^{At} x_0 + he^{At} B * \sum_{j=1}^{N} u_j (h_j - h_{j+1}) \tag{5}$$

Se cere acum rezolvarea problemei bilocale următoare; sistemul pornește la momentul iT cu starea x_i dată de (3) și se cere să se determine comanda în (5) astfel încît la momentul $(i+1)T$ starea să fie x_{i+1} dată de (3). În acest mod, reglajul în timp discret coincide cu cel în timp continuu în punctele iT. În acest sens se înțelege echivalența celor două reglaje. Ținînd seamă de

$$h_j = h * \delta_j$$

unde h_j este treapta Heaviside cu saltul în punctul j, iar δ_j este distribuția Dirac cu suportul în j, din (5) deducem

$$he^{At} B * \sum_{j=1}^{N} u_j (h_j - h_{j+1}) = (h * he^{At} B) * \sum_{j=1}^{N} u_j (\delta_j - \delta_{j+1}) \tag{6}$$

Produsul de convoluție din paranteză este de fapt primitiva în D'_+ a lui $he^{At}B$ și se poate calcula direct ca funcție.

Notăm $$h * he^{At} B = E(t)$$

Introducînd în (5) rezultă

$$x(t) = he^{At} x_0 + E(t) * \sum_{j=1}^{N} u_j (\delta_j - \delta_{j+1}) \qquad \text{sau}$$

$$x(t) = he^{At} x_0 + \sum_{j=1}^{N} (E(t - t_j) - E(t - t_{j+1}))\, u_j \tag{7}$$

unde $I(F)$ este spaţiul coloanelor liniar independente ale lui F; aşadar sistemul este compatibil, oricare ar fi x_b. Soluţia normală

$$\tilde{u} = F^+ x_b \tag{12}$$

unde F^+ este pseudoinversa lui F, realizează performanţa

$$\min \sum_j ||u_j||$$

deoarece soluţia normală este cea minimă în sensul celor mai mici pătrate. Comanda din (12) realizează x_i şi x_{i+1} din (3) pentru orice interval i. Renumerotînd în (12) rezultă

$$\tilde{u} = F^+ x_{bi} \tag{13}$$

Termenul liber din (10) poate fi pus în forma

$$x_b = e^{(A+BK)T} x_i - e^{AT} x_i = (e^{(A+BK)T} - e^{AT}) x_i$$

Matricea din paranteză poate fi calculată o singură dată, astfel încît prin program se indică numai valorile x_i care trebuie urmărite. Aşadar (13) poat fi rescrisă

$$\tilde{u}_i = F^+ (e^{(A+BK)T} - e^{AT}) x_i$$

Faptul că pentru $K = 0$ rezultă $u_i = 0$ este o verificare, în sensul că dacă valorile x_i ar fi chiar starea sistemului fără regulator, atunci nu este nevoie de nici o comandă (sistemul îşi urmăreşte propria sa stare). Notînd

$$K_D = F^+ (e^{(A+BK)T} - e^{AT})$$

rezultă

$$\tilde{u}_i = K_D x_i$$

În concluzie K_D poate fi interpretat ca regulatorul în timp discret care realizează acelaşi răspuns în toate punctele i date de sistemul reglat în timp continuu.

Se poate arăta că pentru rang $B = n$ există soluţia $K_D = K$.

Deoarece din (10) cu condţiile $Nm > n$ şi rang $F = n$ rezultă o infinitate de soluţii, mai pot fi formulate şi alte tipuri de performanţe. De exemplu se poate cere minimizarea erorii de stare în interiorul intervalului T, adică

$$\min \sum_j ||x_{ij} - \tilde{x}_{ij}||$$

u nde x_{ij} este starea dată de (3) iar $\tilde{x}_{ij}$ este starea rezultată sub comanda (4)

În problema bilocală pusă, x_0 este fiecare x_i iar x_{N+1} este x_{i+1} Introducînd $t = t_{N+1}$ în (7) rezultă

$$x(t_{N+1}) = e^{At_{N+1}} * x_0 + \sum_{j=1}^{N} (E(t_{N+1} - t_j) - E(t_{N+1} - t_{j+1}))\, u_j \qquad (8)$$

Termenii din paranteză, după calcul, îi notăm

$$E(t_{N+1} - t_j) - E(t_{N+1} - t_{j+1}) = F_j$$

Aşadar (8) devine

$$x(t_{N+1}) = e^{At_{N+1}} x_0 + \sum_{j+1}^{N} F_j u_j$$

Mai departe, această ecuaţie poate fi rescrisă astfel

$$[F_1 | F_2 | \ldots | F_N] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = x(t_{N+1}) - e^{At_{N+1}} x_0 = x_b \qquad (9)$$

Se observă imediat că în general nu există soluţie pentru comanda constantă pe întreg intervalul T, decît în cazul particular rang $B = n$, adică atunci cînd numărul comenzilor scalare este egal cu dimensiunea stării ($m = n$). deci sistemul este controlabil numai prin B. Cu notaţiile

$$[F_1 | F_2 | \ldots | F_N] = F; \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \tilde{u}$$

sistemul de ecuaţii (9) devine

$$F\tilde{u} = x_b \qquad (10)$$

Dacă rang $F = n$ (controlabilitate) şi dacă

$$Nm > n \qquad (11)$$

atunci rezultă un sistem de n ecuaţii cu mai mult de n necunoscute, deci admite o infinitate de soluţii, oricare ar fi x_b. Într-adevăr, dacă rang $F = n$ atunci pentru orice x_b avem

$$x_b \in I(F)$$

Cele două performanţe întîlnite mai sus pot fi combinate şi pot fi ntroduse penalizări (norme eliptice), astfel încît rezultă un regulator optimal n sensul în care a fost formulat indicele de performanţă.

O altă problemă interesantă este introducerea unor restricţii asupra stărilor şi/sau comenzilor; soluţia există, dar trebuie determinat N care relizează aceste restricţii.

Pentru calculul regulatorului rezultă următorul procedeu

1. Date iniţiale; A, B, K, T, N
2. Se calculează e^{AT} şi $e^{(A+BK)T}$.
3. Se calculează primitivă $E(t)$ şi apoi $F(t)$.
4. Se formează matricea F şi se calculează pseudoinversa F .
5. Se calculează regulatorul $K_D = F^+ (e^{(A+BK)T} - e^{AT})$.

Aceste calcule se efectuează o singură dată, pentru un sistem (A, B, K lat. Calculele necesare în timpul funcţionării regulatorului discret, pentru iecare interval T, se rezumă la înmulţirea matricii K_D cu vectorul x_i.

În ceea ce priveşte viteza de calcul, remarcăm că într-un interval , $j + 1$ trebuie calculată numai comanda care se aplică în momentul $+ 1$.

A Discrete Time-Regulator Equivalent to a Continuous-Time Regulator

Given a constant regulator K for a continuous-time system, we search for a discrete-time regulator K_D which realizes the same states x_i at the points $i = 1, 2, 3, \ldots$ as the continuous-time system $A + BK$.

C.Z. :533.6.011.5
533.696.4

CURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL CONULUI CIRCULAR CU INCIDENȚĂ

C. BERBENTE, S. ZANUC, V. DOBRIN *

Pentru a determina distribuția vitezei și presiunii în jurul conului circular în curgerea supersonică se dezvoltă o metodă numerică perfecționînd metoda Telenin. Perfecționarea s-a realizat 1) folosind o formă nouă pentru curba undei de șoc sugerată de soluția analitică a conului circular la incidența zero, 2) introducînd funcții trigonometrice ortogonale pentru interpolare. Astfel timpul de calcul este mult mai scurt.

Rezultatele numerice pentru distribuția presiunii sînt potrivite cu datele experimentale la M = 3,53.

1. Introducere

Curgerea supersonică în jurul unui con circular cu incidență are apli caţii la determinarea presiunilor în jurul unui vîrf de fuzelaj de avion d mare viteză sau rachetă, la stabilirea condițiilor de intrare în dispozitivel de admisie ale motoarelor aeroreactoare supersonice etc.

În diverse modelări ale fenomenelor supersonice este dorită obținerea cu eforturi reduse, a unor soluții cu grad sporit de precizie. Acest dezidera se poate înfăptui prin conjugarea unor rezultate analitice, care aproximeaz cu suficientă exactitate fenomenul, cu modelarea numerică judicio aleasă.

În continuare se prezintă o astfel de metodă aplicată pentru studiu curgerii în jurul conului la unghiuri mici și moderate de incidență.

Curgerea conică este raportată la un sistem de coordonate sferi centrat în vîrful corpului conic (Fig. 1).

Proprietățile curgerii sînt independente pe o rază și pot fi comple determinate prin rezolvarea ecuațiilor de bază într-un plan transversa curgerii.

---

*) Conf. dr. ing., catedra Aeronave și instalații de bord ;Ing., Turbomecanica, București Asist.. catedra Aeronave și instalații de bord.

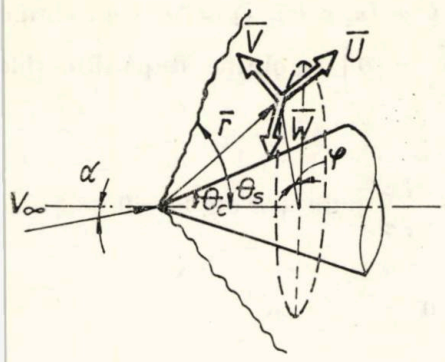


Fig. 1 — Sistemul de coordonate

Frontiera dintre curgerea neperturbată și cea conică o constituie unda de șoc, a cărei secțiune în plan transversal este o curbă închisă.

Pentru domeniul unghiurilor de incidență considerat curgerea transversală este în întregime subsonică (componenta transversală a vitezei este subsonică).

2. Metoda de calcul

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale și pentru prezentarea într-o manieră mai generală a rezultatelor obținute s-au considerat următoarele adimensionalizări ale funcțiilor necunoscute :

$$u = \frac{u}{a_{cr}}; \qquad v = \frac{v}{a_{cr}}$$

$$w = \frac{w}{a}; \qquad p = \frac{p}{\rho_\infty a_{cr}^2} \tag{1}$$

unde : $a_{cr}^2 \frac{2kRT_0}{k+1}$ este viteza critică în curgerea neperturbată.

Sistemul de ecuații diferențiale este compus, în cazul curgerii staționare, din :

— ecuația de continuitate :

$$\nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \tag{2}$$

— ecuația de transport a impulsului ;

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \bar{\Omega} \times \bar{V} = - \frac{\nabla P}{\rho}, \tag{3}$$

— ecuația lui Crocco

$$T \nabla S = \nabla h^* + \bar{\Omega} \times \bar{V}, \tag{4}$$

are în mișcarea adiabatică (dQ ext$' < 0$, deci $h^{*\prime} <$ ct) are forma :

$$\bar{V} \cdot \nabla S = 0 \tag{5}$$

Din ecuațiile de mai sus, în care $\bar{V} = (u, v, w)$, $\bar{\Omega} = \nabla \times \bar{V}$, ținînd seama de caracterul conic al curgerii $\left(\frac{\partial}{\partial r} = 0\right)$ se obține, după direcțiile (r, θ, φ), sistemul:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + 2u + v \operatorname{ctg} \theta = 0$$

$$v \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 - w^2 = 0$$

$$v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + wv - w^2 \operatorname{ctg} \theta = 0 \qquad (6$$

$$v \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} + u w \operatorname{ctg} \theta + uw = 0$$

$$v \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - a^2 \left(v \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{w}{\sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right) = 0$$

În vederea comparării metodei propuse cu metoda Telenin pe care perfecționează, vom utiliza aceleași notații ca în lucrarea [1].

Pentru integrarea sistemului de ecuații diferențiale cu derivat parțiale (6) este necesară folosirea unor condiții la limită.

Acestea sînt impuse de condițiile fizice ale curgerii. Astfel, pentr conul circular, definit de $\theta = \theta_c(\varphi)$, trebuie îndeplinită condiția:

$$\theta = \theta_c, \qquad v < 0 \qquad (7$$

Pe suprafața undei de șoc, care constituie o discontinuitate în cîmpu curgerii, parametrii u, v, w, p, ρ înregistrează un salt pentru exprimare căruia s-au introdus notațiile:

$$n_1 = \cos \alpha \cdot \cos \theta_s - \sin \alpha \cdot \sin \theta_s \cdot \cos \varphi$$

$$n_3 = \cos \alpha \cdot \sin \theta_s + \sin \alpha \cdot \cos \theta_s \cdot \cos \varphi + \sin \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$$

$$n_3 = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \varphi - n_2 \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} \qquad (8$$

$$n_4 = \frac{1 - \varkappa q_\infty^2 (1 - n_2^2 \cos^2 \varepsilon)}{q_\infty n_2}$$

$$\varkappa = \frac{k-1}{k+1}$$

$$\varepsilon = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sin\theta_s} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi_s}\right) \tag{8}$$

$$q_\infty^2 = \frac{M_\infty^2}{\varkappa M_\infty^2 + 1 - \chi}$$

Folosind teorema impulsului și ecuația de continuitate, scrise după tangenta și respectiv normala la unda de șoc, s-au dedus după prelucrări succesive relațiile :

$$u_s = q_\infty n_1$$

$$v_s = q_\infty n_3 \sin\varepsilon \cdot \cos\varepsilon - n_4$$

$$w_s = q_\infty n_3 \cos^2\varepsilon + n_4 \operatorname{tg}\varepsilon \tag{9}$$

$$\rho_s = \frac{q_\infty \cdot n_2 \cdot \cos^2\varepsilon}{n_4}$$

$$P_s = (1-\varkappa) q_\infty^2 n_2^2 \cos^2\varepsilon - \left(\frac{1}{\varkappa} + 1\right)^{-1} (1 - \chi q_\infty^2)$$

care reprezintă valorile parametrilor curgerii după unda de șoc.

În plus în planele de simetrie sînt satisfăcute relațiile :

$$\varphi = 0\,;\,\pi \qquad w = 0$$

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial\varphi} = 0 \tag{10}$$

Problema constă în rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale cu derivate parțiale (6), folosind condițiile la limită date de relațiile (7) și (9).

O astfel de problemă cu condiții bilocale poate fi soluționată în principal prin următoarele metode :

a) Metode cu diferențe finite, care asigură calea de rezolvare pe seama unui volum mare de calcule.

b) Metode care transformă problema în două probleme cu condiții inițiale (posibil de aplicat doar la ecuații liniare).

c) Metode care determină o soluție aproximativă folosind metoda Monte Carlo.

d) Metode care transformă problema de tip bilocal într-una cu condiții inițiale, prin completarea cu un set estimativ de date inițiale.

Din analiza acestor tipuri de metode s-a dedus că pentru scopul propus, o metodă de tipul d) poate fi mai eficientă.

Astfel, s-a stabilit o metodă care este structurată după metoda Telenin [1].

Condițiile la limită (9) se completează cu un set de condiții inițiale estimate. În cazul nostru se estimează forma undei de șoc, $\theta_s = \theta_s(\varphi)$, ceea ce permite cunoașterea condițiilor inițiale ale problemei transformate. Cu acestea sistemul (6) se integrează, iar condițiile la limită (7) sînt folosite pentru a construi o funcție de control care va furniza informațiile necesare pentru modificarea setului estimativ de date inițiale. Procedeul iterativ astfel construit se va considera încheiat cînd se asigură compatibilitatea cu condițiile (7).

Prin utilizarea unei interpolări trigonometrice în raport cu variabila φ sistemul de ecuații cu derivate parțiale se transformă într-un sistem de ecuații diferențiale ordinare care se rezolvă cu o metodă Runge—Kutta de ordinul IV.

Se urmărește folosirea unei estimări bune a formei undei de șoc, $\theta_s = \theta_s(\varphi)$, pentru a asigura stabilitatea și eficacitatea metodei numerice. Pentru aceasta, s-a plecat de la forma undei de șoc, obținută prin extinderea formulei stabilită anterior [2] pentru conul cu incidență nulă sub forma :

$$\sin^2 \theta_s = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\sin^2 \theta^*}{1 - \varkappa} \tag{11}$$

în care unghiul θ^* depinde însă de incidență :

$$\theta^* = \theta_c - b \cdot \alpha \cdot \cos \varphi \tag{12}$$

În relația (12) b este un coeficient dependent de M_∞ și α, cu valori între 0,1—0,3 ; α este unghiul de incidență în radiani, iar φ este unghiul din figura 2.

Pentru alegerea funcțiilor de interpolare pentru funcțiile necunoscute să observăm că, deoarece există simetrice față de semiplanele $\varphi = 0$ și $\varphi = \pi$, funcțiile necunoscute sînt periodice în φ, cu perioada π. Ținînd seama de sistemul de coordonate ales (r, θ, φ) și de reprezentarea funcțiilor necunoscute, u, v, w, p și ρ se constată că în raport cu φ, u, v, p, ρ sînt pare, iar w este impară.

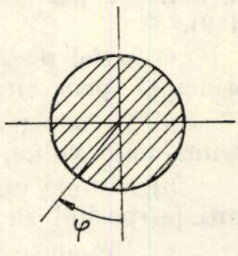


Fig. 2 — Unghiul φ

Ca urmare funcțiile de interpolare sînt de forma:

$$\begin{bmatrix} u(\theta, \varphi) \\ v(\theta, \varphi) \\ p(\theta, \varphi) \\ \rho(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \cong \sum_{K=0}^{m+1} \begin{bmatrix} u_k^o(\theta) \\ v_k^o(\theta) \\ p_k^o(\theta) \\ \rho_k^o(\theta) \end{bmatrix} \cos(k\varphi) \tag{13}$$

$$w(\theta, \rho) \cong \sum_{k=0}^{m+1} w_k^o(\theta) \sin(k\varphi)$$

$$\theta_s(\varphi) \cong \sum_{k=0}^{m+1} \theta_{sk}^o \cdot \cos(k\varphi) \tag{14}$$

Metoda de determinare a coeficienților necunoscuți $u_k^o \ldots, \theta_{sk}^o$ folosită în [1] este dezavantajoasă din punctul de vedere al timpului de calcul, necesitînd la fiecare interpolare rezolvarea a $5n$ sisteme de ecuații liniare (n fiind numărul nodurilor).

Avantajul principal al metodei de interpolare utilizată în prezenta schemă numerică este utilizarea unor expresii explicite pentru calculul coeficienților expresiilor de interpolare (evitînd rezolvarea unor sisteme de ecuații).

Metoda utilizează proprietatea de ortogonalitate a unor sisteme de funcții. Astfel, considerînd $2N$ puncte de diviziune echidistante pe intervalul $[0, 2N-1]$, relativ la mulțimea discretă $\{0, 1. \ldots, 2, N-1\}$, următoarele sisteme de funcții sînt ortogonale:

$$\begin{aligned} &\cos\frac{\pi}{N} kx, \qquad k = 0, 1, \ldots, N \\ &\sin\frac{\pi}{N} mx, \qquad m = , 2, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{15}$$

Dacă sînt date valorile unei funcții $f(x)$ în modurile $\{0,1, \ldots . \ldots, 2N-1\}$, într-un $x \in [0,2N-1]$ se face aproximarea:

$$f(x) \cong \frac{a_o}{2} + \sum_{K=1}^{N-1} \left(a_K \cos\frac{\pi}{N} kx + b_K \sin\frac{\pi}{N} kx \right) + \frac{a_N}{2} \cos \pi x \tag{16}$$

Folosind proprietatea de ortogonalitate a sistemelor de funcții considerate, se determină coeficienții astfel:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) \cdot \cos\frac{\pi}{N} kx_i; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N \tag{17}$$

și

$$b_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) \cdot \sin \frac{\pi}{N} \cdot kx_i \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{18}$$

$$x_i = i$$

Se constată că pe $[0, 2\,N]$ aproximarea lui $f(x)$ realizată cu (16) este o funcţie periodică, lucru necesar în reprezentarea funcţiilor necunoscute.

Cu aceste expresii de interpolare (folosite în reprezentarea funcţiilor necunoscute şi la calculul derivatelor după direcţia φ), sistemul (6) devine un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare :

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{d\theta} \\ \frac{dv}{d\theta} \\ \frac{dw}{d\theta} \\ \frac{dp}{d\theta} \\ \frac{d\rho}{d\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \ (\theta, u, v, w, p, \rho) \\ f_2 \ (\theta, u, v, w, p, \rho) \\ f_3 \ (\theta, u, v, w, p, \rho) \\ f_4 \ (\theta, u, v, w, p, \rho) \\ f_5 \ (\theta, u, v, w, p, \rho) \end{bmatrix} \tag{19}$$

unde funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_5$ se obţin prin rezolvarea sistemului (7) în raport cu derivatele după direcţia θ.

Pentru evaluarea erorilor, aprioric admise prin aproximarea formei undei de şoc, este stabilită o funcţie de control care serveşte şi pentru corecţiile ulterioare ale formei undei de şoc. O astfel de funcţie a fost construită în sensul determinării abaterilor existente în valorile obţinute pentru viteza v pe corp după integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale, prin comparaţie cu condiţiile la limită (7). Forma aleasă a funcţiei de control este următoarea :

$$F(\theta_s) = \sum_{K=0}^{m+1} V_K^2(\theta_s) \tag{20}$$

care se minimizează la valoarea zero.

O altă etapă în stabilirea metodei numerice propusă este alegerea metodei de minimizare a funcţiei scop.

Cele mai eficiente metode actuale pentru determinarea minimului unei funcţii neliniare reale de mai multe variabile au la bază informaţiile locale, pentru fiecare punct. Dintre metodele pentru minimizarea unei funcţii de mai multe variabile metodele Fletcher-Reeves şi Davidon—Fletcher—Powell (DFP) sînt considerate în prezent cele mai bune. Prima

este preferată în cazul problemelor cu număr mare de variabile, iar metoda DFP este aleasă pentru număr mic și mediu de variabile, fiind mai rapidă [5].

În continuare se insistă asupra cîtorva aspecte ale aplicării metodei DFP în cazul curgerii supersonice în jurul conului cu unghiuri moderate de incidență.

Funcția de control în cazul considerat, $F(\theta_s)$, dată de (20), nu este precizată analitic, și deoarece determinarea grad $F(\theta_s)$ implică calculul derivatelor parțiale $\frac{\partial F}{\partial \theta_{si}}$, $i = 0, 1, \ldots, m+1$, se recurge la aproximarea acestora într-unul din următoarele moduri:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_{si}} = \frac{F(\theta_{so}, \ldots, \theta_{si} + \Delta, \ldots, \theta_{sm+1}) - F(\theta_{so}, \ldots, \theta_{si}, \ldots, \theta_{sm+1})}{\Delta} \tag{21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_{si}} = \frac{F(\theta_{so}, \ldots, \theta_{si} + \frac{\Delta}{2}, \ldots, \theta_{sm+1}) - F(\theta_{so}, \ldots, \theta_{si} (- \frac{\Delta}{2}, \ldots, \theta_{sm+1})}{\Delta} \tag{22}$$

cea de-a doua aproximare este mai bună, dar implică un volum de calcul dublu.

Derivatele parțiale au fost calculate în funcție de coeficienții de interpolare θ_{si} în (21) prin perturbațiile Δ date fiecărui coeficient în parte, evitîndu-se apariția unor forme nedorite ale undei de șoc.

Remarcăm că valorile coeficienților θ_{si}° descresc cînd indicele i crește ($i = 0, \ldots, m+1$), ordinele de mărime fiind proporționale cu α^i. Acest lucru trebuie avut în vedere la alegerea valorilor perturbațiilor date acestor coeficienți.

Un alt aspect al metodei DFP îl constituie stabilirea direcției de minimizare. Se face pentru aceasta o căutare unidimensională după direcțiile de maximă descreștere a funcției de control.

Pentru θ_{si}:

$$\theta_{si} = \theta_{si} - \lambda_j M_i \qquad j = 1, 2, \ldots, l \tag{23}$$

unde l este numărul de valori pentru factorul unidimensional λ, M_i este direcția stabilită în funcție de gradient, se calculează funcția de control. Se alege pentru λ valoarea care minimizează această funcție și deci:

$$\theta_{si}^{(k+1)} = \theta_{si}^{(k)} - \lambda_{opt} M_i^{(k)} \tag{24}$$

Pentru reducerea timpului de calcul căutarea undimensională se recomandă a se face luînd pași mai mari în variația lui λ; astfel, alegînd trei valori

convenabile λ_1, $_2$, λ_3 se poate face apoi o interpolare simplă, folosind o parabolă :

$$F(\lambda) = C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3 \tag{25}$$

Se obţine :

$$\lambda_{opt} = -\frac{C_2}{2C_1} \tag{26}$$

Coeficienţii C_1 şi C_2 sînt calculaţi cu relaţiile

$$C_1 = \frac{F(\lambda_1) - F(\lambda_3) - \dfrac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2}\,[F(\lambda_1 - F(\lambda_2)]}{(\lambda_1 - \lambda_3)\,(\lambda_3 - \lambda_2)} \tag{27}$$

$$C_2 = \frac{F(\lambda_1) - F(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} - C_1(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{28}$$

În situaţiile în care estimările iniţiale sînt depărtate de soluţie, metoda D F P poate converge încet datorită faptului că direcţiile sînt aproximate numeric. Din acest motiv este indicat ca, folosind formula (11), să se facă o determinare a coeficientului b la fel ca pentru factorul λ, obţinîndu-se o formă mai bună a undei de şoc folosită la start.

Pentru integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale ordinare (19), s-au utilizat metoda Runge-Kutta-IV, varianta Gill, care face o alegere a coeficienţilor astfel încît să diminueze apreciabil erorile de rotunjire, evitînd totodată instabilitatea la care a condus utilizarea diferenţelor finite.

3. Algoritmul metodei de determinare a cîmpului curgerii în jurul conului de incidenţă

Se împarte domeniul de calcul, $\varphi \in [0, 2\pi]$, în $2(m + 1)$ sectoare egale. Din motive de simetrie se consideră doar $(m + 2)$ semiplane, φ_k, $k = 0, 1, \ldots, m + 1$. Domeniul este limitat de două frontiere : suprafaţa undei de şoc (θ_s) şi cea a conului solid (θ_c). Pentru a genera reţeaua de calcul se consideră domeniul $\theta \in [\theta_c, \theta_s]$ împărţit în domenii.

Etapele algoritmului sînt următoarele :

1) Se estimează cele $m + 2$ valori ale suprafeţei undei de şoc, $\hat{\theta}_s$, folosind relaţiile (11) şi (12).

2) Se determină expresia de interpolare pentru forma undei de şoc folosind relaţiile (16), (17) şi (18).

3) Avînd forma undei de şoc se calculează derivatele $\dfrac{d\theta_s}{d\varphi}$ şi deci unghiurile ε în nodurile reţelei, din (18).

4) Se folosesc θ_s și ε pentru a determina u_s, v_s, w_s, ρ_s și p în fiecare nod de pe suprafața undei de șoc prin condițiile de salt (9).

5) Folosind valorile funcțiilor necunoscute se obțin prin (17) și (18) coeficienții expresiilor de interpolare.

6) Se determină derivatele după φ ale funcțiilor necunoscute, în nodurile suprafeței undei de șoc, folosind expresiile de interpolare deduse.

7) Sistemul (19) se integrează folosind metoda Runge-Kutta-IV varianta Gill, obținîndu-se valorile pentru u, v, w, p și ρ în noduri plasate la $\varphi = \text{const.}$

8) Utilizînd valorile determinate pe corp se verifică condiția :

$$F(\theta_s) \leqslant \delta \tag{28}$$

9) Dacă această condiție nu e îndeplinită se folosește metoda D F P pentru corectarea estimărilor inițiale pînă cînd relația (28) este îndeplinită, în care caz soluția este obținută.

10) Aceste valori sînt folosite pentru a determina coeficienții expresiilor de interpolare în (17) și (18).

Rezultate — Concluzii

Au fost alese pentru rularea programului de calcul stabilit pe baza metodei prezentate, cîteva cazuri în care se dispunea de rezultate experimentale sau numerice [1,3].

Astfel pentru $M_\infty = 3{,}53$, $\alpha = 10°$ și $\alpha = 15°$ pentru un con cu $\theta_c = 20°$ sînt prezentate în fig. 3 forma undei de șoc, iar în fig. 4 și fig. 5 coeficientul de presiune C_p, tabel 1, calculat cu formula :

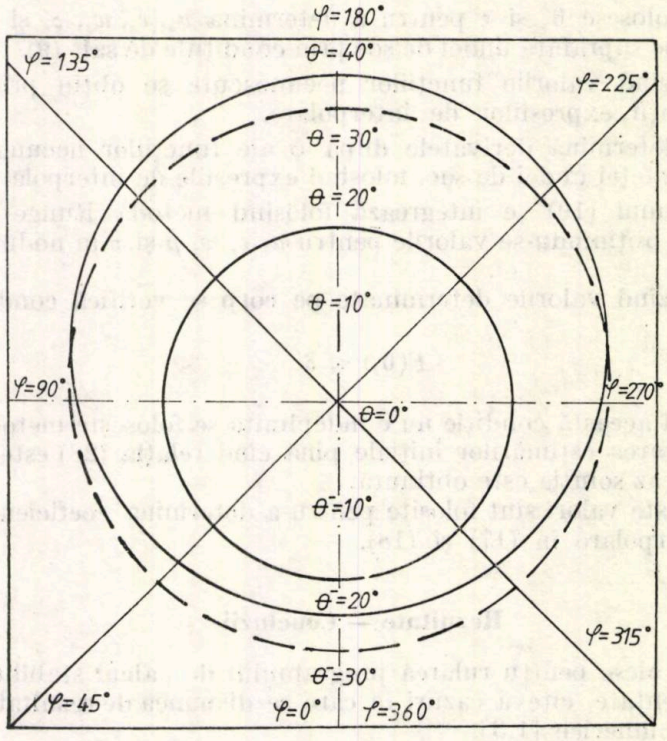
$$C_p = \frac{2}{kM_\infty^2}\left[p\left(\frac{2k}{k+1} + \frac{k-1}{2}M_\infty^2\right) - 1\right] \tag{29}$$

unde p este valoarea adimensionalizată cu relația (1) a presiunii după unda de șoc conică.

Tabelul 1

φ	$C_p(\alpha = 10°)$	$C_p(\alpha = 15°)$
0°	0,53	0,67
45°	0,43	0,41
90°	0,24	0,208
135°	0,11	0,015
180°	0,10	0,081

Se constată concordanța cu rezultatele experimentale și adăugînd timpul de calcul redus (cca. 10 minute), obținut pe un calculator CORAL 4011, rezultă eficacitatea metodei care se poate aplica unui domeniu larg de cazuri.



$M_\infty = 3{,}53$; $\theta_c = 20°$

$\alpha = 10°$ – – – –

$\alpha = 15°$ ——

Fig. 3

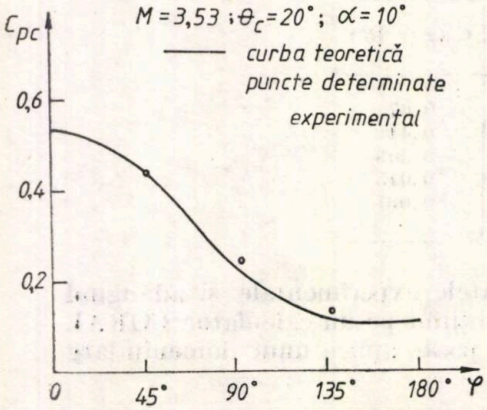


Fig. 4

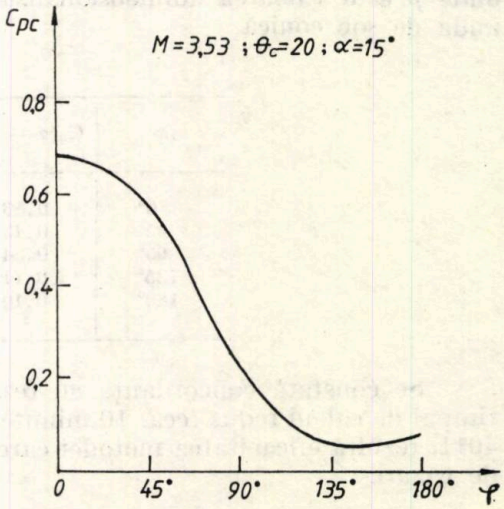


Fig. 5

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Holt*, Numerical methods in fluid dynamics, 1977, Springer Verlag.
2. *E. Carafoli, C. Berbente*, Considerations in the supersonic and hypersonic motion past circular cone at angle of attack, Zeitschnift fur flugwissenshaften. No. 18/1970.
3. *R. Gonidou*, Ecoulements supersoniques autour de cones en incidence. La Recherche Aérospatiale, Nr. 120/1967.
4. *C. Berbente*, Rev. Roum. Sci. Tech. Méc. Appl. Nr. 6/1972.
5. *I. Dancea*, Metode de optimizare, Editura Dacia 1977.

Supersonic Motion around the Circular Cone at Angle of Attack

In order to determine the velocity and pressure distributions around a circular cone in supersonic flow, a numerical method is developped by improving the Telenin's method. The improvement is carried out 1) by using a new form for the shock wave curve as a starting approximation, suggested by an analytical solution for the circular cone at zero incidence and 2) by introducing orthogonal trigonometric functions for interpolation. Thus the computation time is much shorter.

The numerical results for the pressure distribution are in good agreement with experimental data at $M_\infty = 3{,}53$.

CZ. 629.73 :519.863

METODE DE OPTIMIZARE A PUTERII ELICILOR EOLIENE CU AX ORIZONTAL

S. GĂLETUȘE*

Se prezintă două metode de optimizare a turbinelor eoliene.

Prima este dezvoltată pornind de la teoria impulsului incluzînd și pierderea la capătul palei și cea de a doua metodă este o metodă proprie bazată pe observația că vitezele induse nu sînt afectate de rezistența la înaintare a profilului.

Sînt date exemple care ilustrează proiectarea optimă prin ambele metode.

Notații

α_i = unghi indus

V = viteza vîntului

Ω = viteza unghiulară

W_r = $(V^2 + r^2\Omega^2)^{1/2}$ — viteza rezultantă

W = viteza efectivă rezultantă

v, ω = viteze induse

$\overline{v}$ = v/V

$\overline{\omega}$ = ω/Ω

R = raza rotorului

x = $r\Omega/V$ — pas geometric local

X = $R\Omega/V$ — pas geometric la extremitate

c = coarda locală

r = raza locală

$\overline{c}$ = c/R

$\overline{r}$ = r/R

N = numărul palelor

σ = $Nc/2\pi r$ — rigiditatea palei

C_z — coeficient de portanță (profil)

C_x = coeficient de rezistență (profil)

C_M = coeficient de moment (eoliană)

C_T = coeficient de tracțiune (eoliană)

C_P = $M\Omega/\frac{\rho}{2}\pi R^2 V^3$ — coeficient de putere

$\overline{T}$ = $T/\frac{\rho}{2}\pi R^2$ — tracțiune adimensională

M = moment al elicei eoliene
indicele zero asociat cu $C_x = 0$.

---

* Conf. dr. ing., catedra Aeronave și instalații de bord.

Introducere

În ultimul timp există preocupări deosebite în utilizarea energiei vîntului pentru generarea de energie electrică cu aero-generatoare de mari puteri (1000 ... 3000 kW).

Studiind aspectele aerodinamice pentru elici eoliene cu ax orizontal (care pare a fi soluția cea mai bună pentru puteri mari) o serie de lucrări [1]—[6] au căutat să găsească metode de optimizare a performanțelor acestora. Această optimizare este posibilă printr-o răsucire a palei și o distribuție de corzi optime.

Metode de optimizare

Se vor prezenta în continuare, în principal, două metode de optimizare a coeficientului de putere C_P și anume aceea a lui Wilson și Walker [2, 3] și cea propusă de noi într-o lucrare anterioară [4]. Prima metodă pornește de la relațiile lui Glauert [7] pentru impuls și moment al impulsului ținînd seama de coeficientul de pierdere spre vîrful palei k

$$\frac{\sigma C_{To}}{4\cos^2(\beta+\alpha_i)} = \frac{(1-\bar{v}k)\,\bar{v}k}{(1-\bar{v})^2},$$
$$\frac{\sigma C_{Mo}}{4\cos(\beta+\alpha_i)\sin(\beta+\alpha_i)} = \frac{\bar{\omega}k}{1+\bar{\omega}}, \tag{1}$$

unde $\bar{v}$, $\bar{\omega}$ sînt vitezele induse adimensionale iar semnificația unghiurilor β și α_i se poate vedea în figura 1. Factorul de pierdere la vîrful palei k poate fi luat după teoria lui Prandtl sau Goldstein [7] iar C_{To} și C_{Mo} sînt coeficienții de tracțiune respectiv de moment

$$C_T = C_z\sin(\beta+\alpha_i) + C_x\cos(\beta+\alpha_i)$$
$$C_M = C_z\cos(\beta+\alpha_i) - C_x\sin(\beta+\alpha_i), \tag{2}$$

pentru cazul ideal, fără frecare ($C_x = 0$).

Se va remarca faptul că în prima relație (1) se introduce o contribuție de ordinul doi datorită factorului de pierdere k, care a redus timpul de calcul numeric în studiile lui Walker [8], dar care nu are suport teoretic sau experimental.

Din relațiile (1) se obține

$$\bar{v}(1-\bar{v}k) = \bar{\omega}(1+\bar{\omega})\,x^2, \tag{3}$$

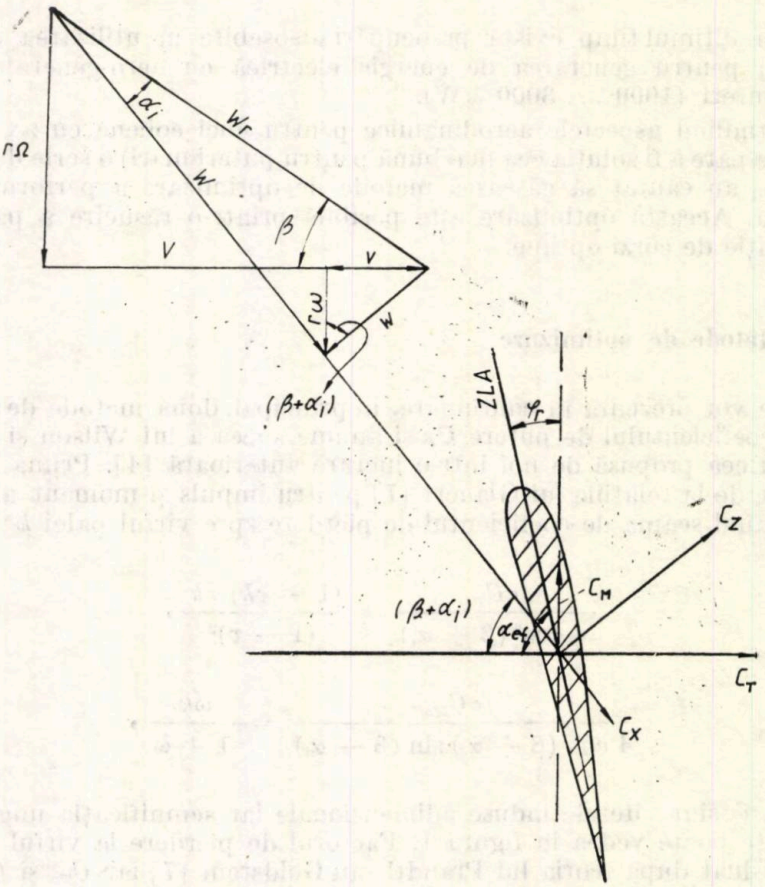


Fig. 1 — Geometria curgerii în faţa profilului

prin eliminarea lui σC_z şi ţinînd seama de relaţia geometrică

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha_i) = \frac{1 + \bar{\omega}}{1 - \bar{v}} x = \frac{\bar{v}}{\bar{\omega} x}. \tag{4}$$

Contribuţia locală a coeficientului de putere C_P este dată de

$$\frac{\mathrm{d}C_P}{\mathrm{d}x} = 2\sigma \left(\frac{W}{V}\right)^2 C_{Mo} \left(\frac{x}{X}\right)^2, \tag{5}$$

iar după înlocuirea vitezei reale W,

$$W = \frac{V(1 - \bar{v})}{\cos(\beta + \alpha_i)} \tag{6}$$

și ținînd seama de a doua relație (1) se obține

$$\frac{dC_P}{dx} = 8\,\bar{\omega}\,(1 - \bar{v})\,\frac{x^3}{X^2}. \tag{7}$$

La fiecare rază r, contribuția de putere se obține prin modificarea vitezei axiale induse $\bar{v}$ pînă cînd ecuația (7) este maximizată. În procesul de maximizare a ecuației (7), trebuie de asemenea ca ecuația (3) să fie satisfăcută. În plus, k este o funcție de $\bar{v}$, $\bar{\omega}$, x și X. De aceea, la fiecare valoare $\bar{v}$ este necesar un proces de iterare pentru a obține valori consistente $\bar{\omega}$ și k.

Ca un rezultat al optimizării performanței la fiecare secțiune, se determină unghiul curgerii relative Φ,

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - (\beta + \alpha_i), \tag{8}$$

și produsul cC_z ca funcție de raza palei r.

Se va observa că optimizarea se face pentru elice ideală (fără frecare) iar coeficientul de putere C_P se va calcula prin integrare utilizînd coeficientul de moment (2) pentru elicea reală ($C_x \neq 0$).

În lucrarea anterioară [4] s-a arătat că vitezele induse $\bar{v}$, $\bar{\omega}$ din fața profilului nu sînt influențate de frecarea din stratul limită. Cu această observație s-a putut găsi condiția de optim pentru

$$\eta_i = \frac{M\Omega}{TV} = \frac{C_P}{\bar{T}} \tag{9}$$

ceea ce înseamnă C_P maxim cu constrîngerea $\bar{T} = \text{const}$. Pentru a se putea obține un rezultat analitic nu s-a luat în considerare coeficientul de

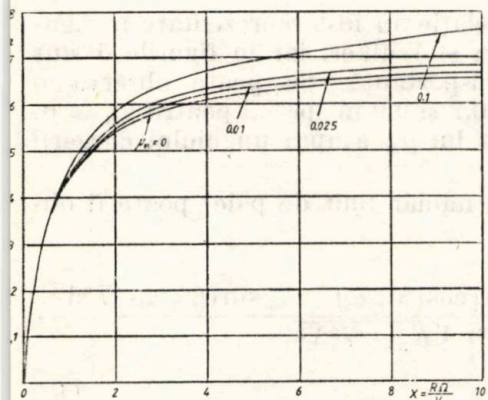


Fig. 2 — Coeficientul K_2 pentru C_P maxim.

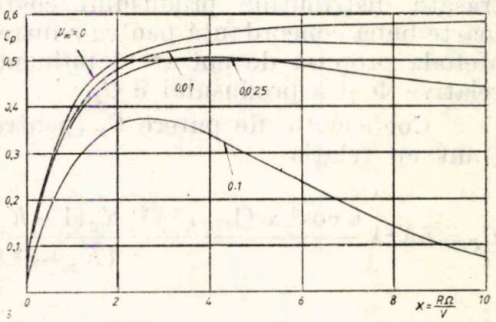


Fig. 3 — Coeficientul de putere maximă ($N = \infty$).

pierdere spre vîrful palei. În figura 2 se prezintă parametrul K_2 pentru C_P maxim (număr infinit de pale, $k = 1$) iar în figura 3 a fost reprezentat coeficientul de putere pentru diferite valori $\mu_m = (C_x/C_z)_{minim}$

$$C_P = 4K_2^2(1-K_2)\left[\frac{X^2+2K_2^2-K_2}{K_2^2+X^2}+\frac{K_2(1-2K_2)}{X^2}\ln\left(1+\frac{X^2}{K_2^2}\right)\right]-$$

$$-4\mu_m XK_2(1-K_2)\left[\frac{2X^2+5K_2^2-3K_2}{3(K_2^2+X^2)}+\frac{K_2(3-5K_2)}{X^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2K_2}{X^3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{X}{K_2}\right)\right]. \tag{10}$$

Unghiul $(\beta + \alpha_i)$ se poate deduce din

$$\operatorname{tg}(\beta+\alpha_i) = \frac{v}{r\omega} = \frac{X\bar{r}}{K_2}, \tag{11}$$

iar produsul $\bar{c}C_z$ se poate calcula cu relaţia [4]

$$\bar{c}C_z = \frac{8\pi k\bar{r}^2K_2(1-K_2)X}{N(K_2+\bar{r}^2X^2)\sqrt{K_2^2+\bar{r}^2X^2}}, \tag{12}$$

unde s-a introdus şi coeficientul de pierdere la vîrful palei k după Prandtl [7]

$$k = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,cos}\exp\left\{-\frac{N(1-\bar{r})}{\bar{r}\cos(\beta+\alpha_i)}\right\}. \tag{13}$$

În relaţia (12) se va lua C_z pentru $\alpha_{\mu m}$ adică pentru $(C_x/C_z)_{minim}$. Unghiul curgerii relative Φ este

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{X\bar{r}}{K_2}. \tag{14}$$

Rezultatele obţinute cu această relaţie au fost reprezentate în figurile 4 împreună cu datele lui Wilson şi Walker, iar în figurile 5 sînt trasate distribuţiile produsului coardă-portanţă. Se poate observa o foarte bună concordanţă pentru r între 0,2 şi 0,9 în special pentru $\mu_m = 0$. Metoda propusă de noi arată influenţa lui μ_m asupra unghiului curgerii relative Φ şi a produsului $\bar{c}\ C_z$.

Coeficientul de putere C_P (pentru număr finit de pale) poate fi obţinut cu relaţia

$$C_P = 8X^2\int_0^1 \frac{k\cos^2\alpha_i(1-\bar{r}^2X^2)K_2(1-K_2)[\cos(\beta+\alpha_i)-\mu_m\sin(\beta+\alpha_i)]\bar{r}^3d\bar{r}}{(K_2+\bar{r}^2X^2)\sqrt{K_2^2+\bar{r}^2X^2}}, \tag{15}$$

dedusă cu relaţia (2) pentru C_M şi (12) pentru $N\bar{c}C_z$.

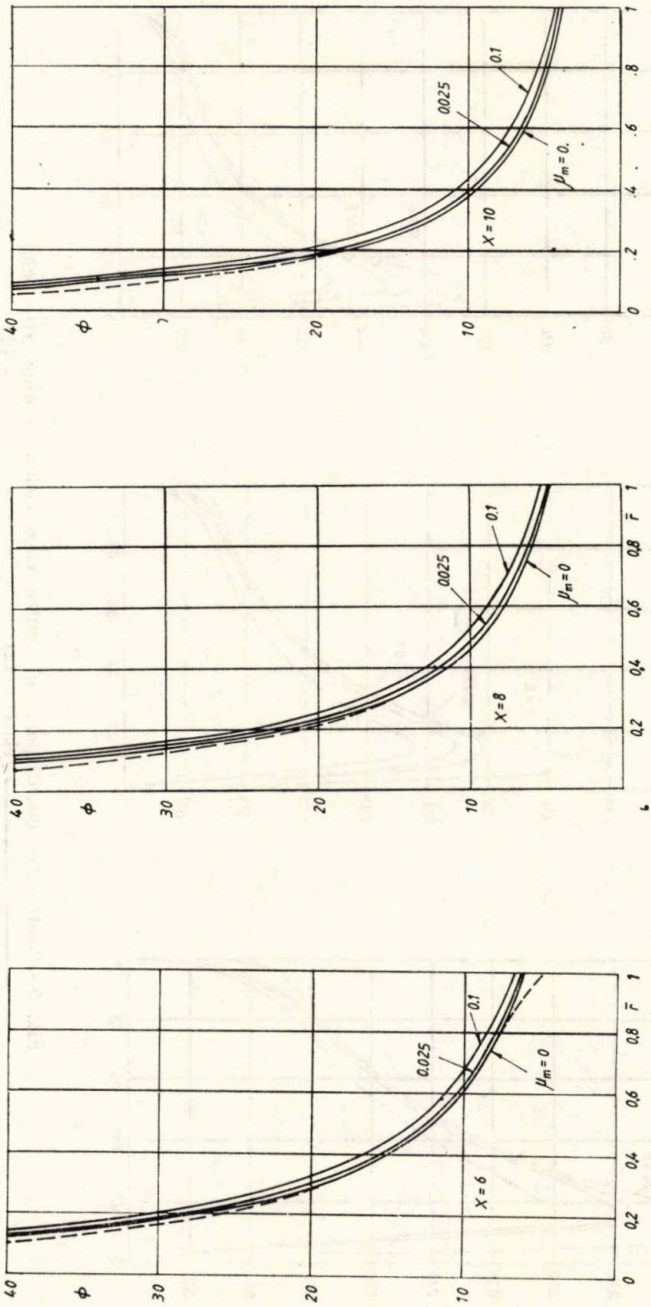


Fig. 4 — Unghiul curgerii relative pentru elice eoliană optimă ——— relația (14)
– – – – – – – – – [2].
a) $X = 6$; b) $X = 8$; c) $X = 10$.

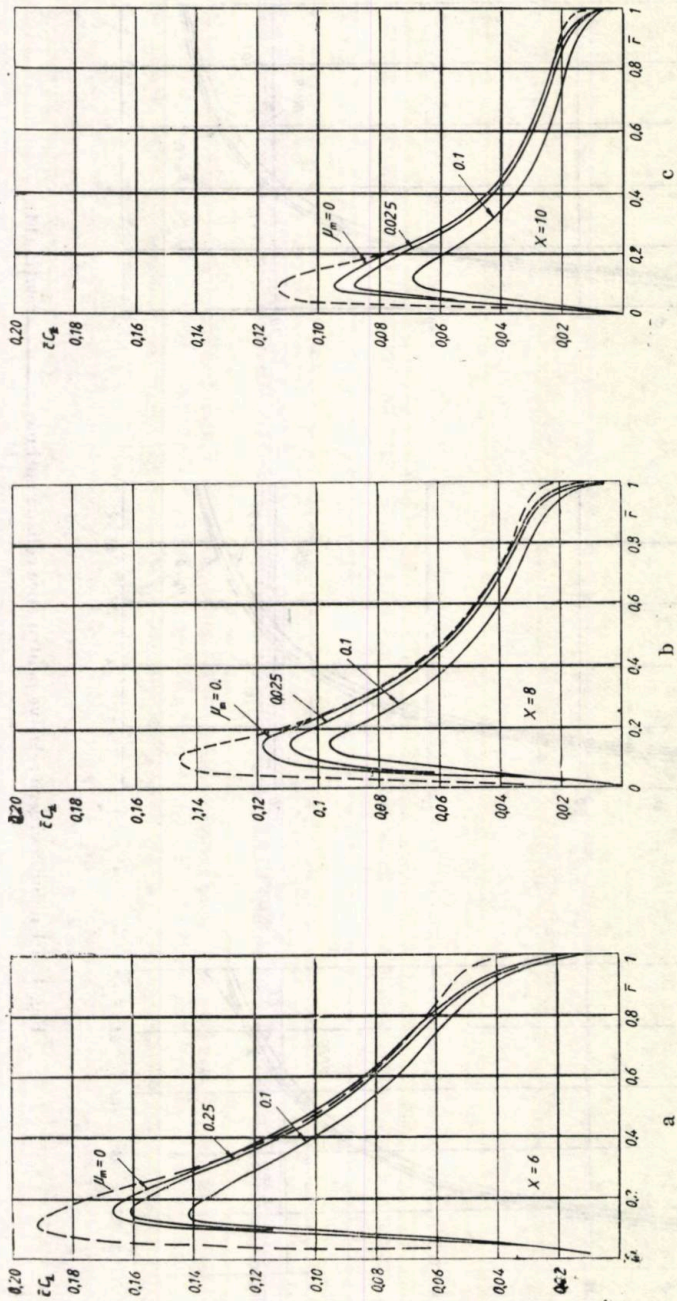
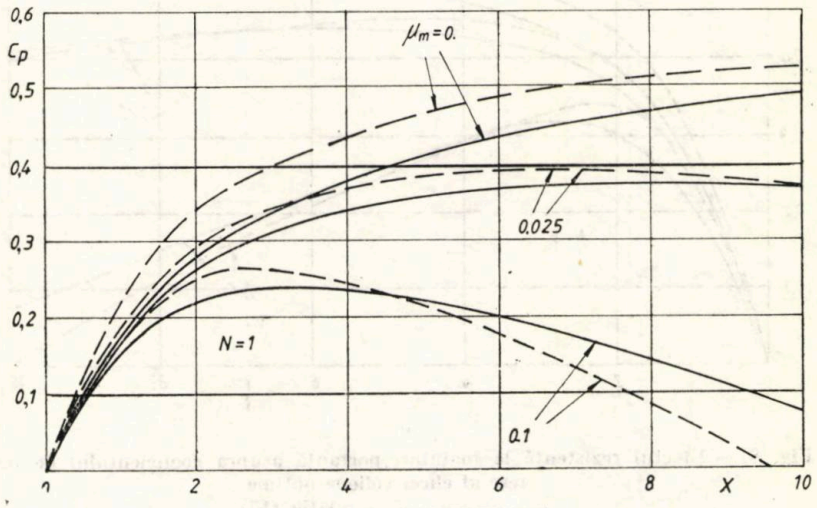
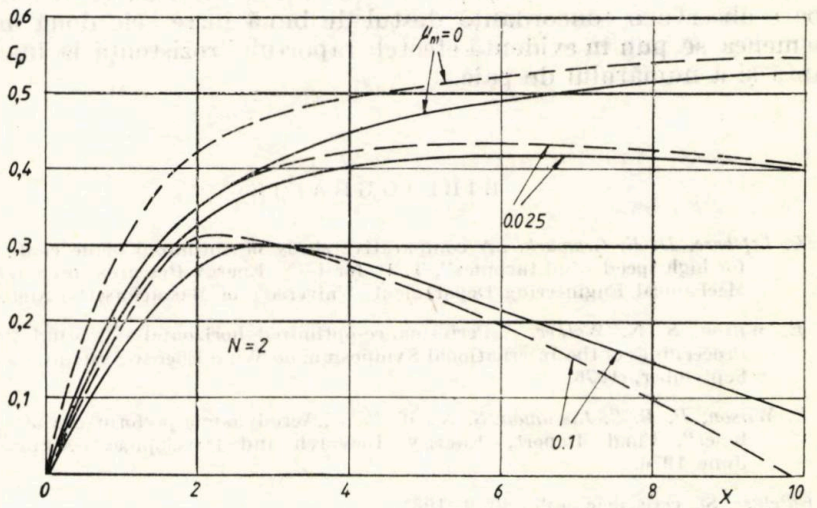


Fig. 5 — Distribuţia coardă-portanţă pentru elice eoliană optimă (trei pale)
relaţia (12) — — — — — — — — — [2]
a) $X = 6$; b) $X = 8$; c) $X = 10$.


0,6
C_p
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$\mu_m = 0.$
0.025
N = 1
0.1
0
2
4
6
8
X
10

a


0,6
C_p
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
$\mu_m = 0$
0.025
N = 2
0.1
0
2
4
6
8
X
10

b

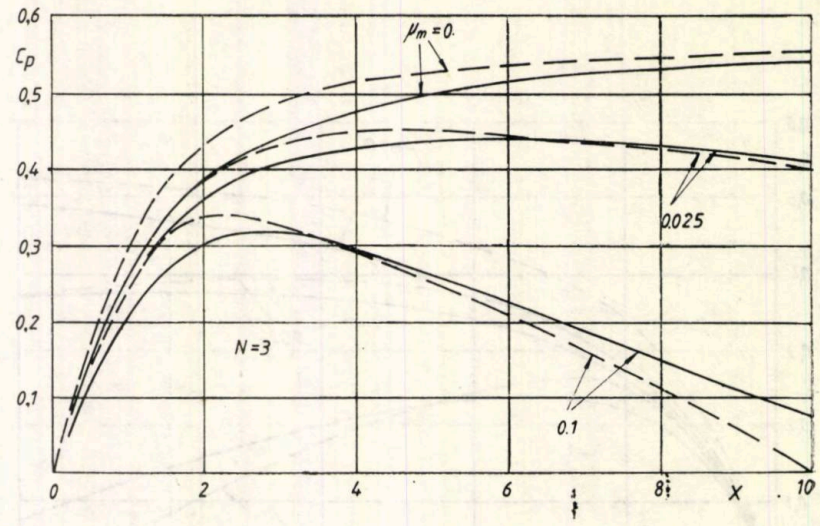


Fig. 6. — Efectul rezistenţă la înaintare/portanţă asupra coeficientului de putere al elicei eoliene optime
——————— relaţia (15)
— — — — — — [2]
a) $N = 1$; b) $N = 2$; c) $N = 3$.

Figurile 6 prezintă o comparaţie între coeficienţii de putere maximi fiind obţinuţi cu relaţia (15) şi cei calculaţi de Wilson şi Walker [2]. Se poate observa o concordanţă destul de bună între cele două metode. De asemenea se pun în evidenţă efectele raportului rezistenţă la înaintare/portanţă şi a numărului de pale.

BIBLIOGRAFIE

1. *P. L. Lefebvre, D. E. Cromack*, „A comparative study of optimized blade configurations for high speed wind turbines", T. R. for U. S. Energy Research, prepared by the Mechanical Engineering Department, University of Massachusetts, August 1977.

2. *R. E. Wilson, S. N. Walker*, „Performance-optimized horizontal-axis wind turbines", Proceedings of the International Symposium on Wind Energy Systems, Cambridge, September, 1976.

3. *R. E. Wilson, P. B. S. Lissaman, S. N. Walker*, „Aerodynamic performance of wind turbines", Final Report, Energy Research and Development Administration, June 1976.

4. *S. Găletuşe*, St. cerc. mec. apli., 40, 4, 1981.

5. *S. Găletuşe, A., Sârbu, V. N. Constantinescu*, St. cerc. mec. apli., 43, 4, 1984.

6. *C. Rohrbach, R. Worobel*, „ Performance characteristics of aerodynamically optimum turbines for wind energy generators", American Helicopter Soc., Preprint No. S-996, May 1975.

7. *W. F. Durand*, (Ed.), „Aerodynamic Theory", *H., Glauert* „Airplane Propellers", vol. IV, Division I, Chapter VII, Julius Springer, Berlin 1935.

8. *S. B. Walker*, „Performance and optimum design analysis/Computation for propeller-type wind turbine", Ph. D. Thesis, Oregon State University, May 1976.

Methods for Optimum Power of Windmill with Horizontal-Axis

The two procedures for optimum wind turbines are shown. First is developed from a modified strip theory that includes tip-loss and the second is an own method based on observation that the induced velocities are not affected by the profil drag.

Examples are presented that illustrate optimum design by the both methods.

C. Z.: 62–567

A TECHNIQUE FOR ASSESSING THE EXISTENCE OF PROPORTIONAL DAMPING

M. RADEȘ *

The paper suggests a technique for the dynamic analysis of structural systems in terms of characteristic phase lag modes of vibration. It is shown that for systems with nonproportional damping both the frequency response modal vectors and the excitation modal vectors are frequency dependent. For systems with proportional damping these vectors are no longer dependent on the excitation frequency. This can be used as a criterion to identify the type of damping in an actual structure.

1. Introduction

In most lightly damped structural systems it is considered that damping does not couple normal coordinates. The transformation to normal coordinates diagonalizes the damping matrix simultaneously with the inertia and stiffness matrices. This type of damping is called "classical" or "proportional".

In actual structures, the modal damping matrix has not a diagonal form. This type of damping is called "non-classical" or "non-proportional". The equations of motion written in terms of normal coordinates cannot be separated and solved independently.

Conditions under which it may be considered satisfactory to neglect the off-diagonal terms of the modal damping matrix have been studied [1]. There seems to be no conclusive experimental evidence whether the damping in a particular type of structure is proportional or not. The purpose of this paper is to present a tentative experimental technique for assessing the existence of proportional damping.

2. Modal Theory

It is assumed that the motion of the actual structural system can be described by a linear constant parameter model having N degrees of freedom. For steady-state harmonic excitation $\{f\} = \mathcal{R}e\,(\{\hat{f}\}e^{i\omega t})$ and response $\{x\} = \mathcal{R}e\,(\{\tilde{x}\}e^{i\omega t})$ the matrix equation of motion is

$$[[K] - \omega^2[M] + i\omega[C]]\{\tilde{x}\} = \{\hat{f}\} \tag{1}$$

* Reader, dr. eng., Strength of Materials Chair

where $[M]$, $[C]$ and $[K]$ are respectivelly inertia, damping and stiffness matrices corresponding to the vector of complex displacements $\{\tilde{x}\}$, and $\{f\}$ is the vector of real excitation forces.

The matrix

$$[B(\omega)] = [B^R(\omega)] + \mathrm{i}[B^I(\omega)] = [K] - \omega^2[M] + \mathrm{i}\omega[C] \tag{2}$$

is called the *dynamic flexibility matrix.*

The *frequency response function* (FRF) *matrix* $[H(\omega)]$ is defined as

$$[H(\omega)] = [B(\omega)]^{-1} = [H^R(\omega)] + \mathrm{i}[H^I(\omega)], \tag{3}$$

which implies that

$$\{\tilde{x}\} = [H(\omega)]\{\hat{f}\}. \tag{4}$$

2.1 *Normal Modes.* Normal modes of vibration are found by solution of the eigenvalue problem of the associate conservative system

$$[[K] - \omega_r^2[M]]\{\Psi^{(r)}\} = \{0\} \qquad (r = 1, 2, \ldots, N) \tag{5}$$

where ω_r are undamped natural frequencies and $\{\Psi^{(r)}\}$ are the corresponding normal modal vectors. Matrices of modal mass, stiffness and damping are respectively defined by

$$[\Psi]^T[M][\Psi] = [m] = \mathrm{diag}\,[m_r], \tag{6}$$

$$[\Psi]^T[K][\Psi] = [k] = \mathrm{diag}\,[k_r] \tag{7}$$

$$[\Psi]^T[C][\Psi] = [c], \tag{8}$$

where $[\Psi]$ is the "modal matrix" having the normal mode vectors $\{\Psi^{(r)}\}$ as columns.

The force distribution required to excite a pure normal mode $\{\Psi^{(r)}\}$ at the frequency ω_r is given by

$$\{\hat{\tilde{f}}^{(r)}\} = \frac{1}{z_r(\omega_r)}\,\omega_r[C]\{\Psi^{(r)}\}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, N) \tag{9}$$

where $z_r(\omega_r)$ is a scale factor depending on the way the vectors are normalized, and the vectors $\{\hat{\tilde{f}}^{(r)}\}$ define the "principal modes of excitation".

2.2 *Characteristic Phase Lag Modes.* It has been shown [2] that at each forcing frequency ω there are $r = 1, 2, \ldots, N$ real forcing vectors $\{\hat{f}\} = \{\Gamma_\omega^{(r)}\}$ called *excitation modal vectors* which produce real response vectors of the form $\{\tilde{x}(\omega)\} = \{\Phi_\omega^{(r)}\}\{e^{i\varphi_r(\omega)}$ where $\{\Phi_\omega^{(r)}\}$ are termed

frequency response modal vectors or *forced modal vectors* and — $\varphi_r(\omega)$ are *characteristic phase lags.*

Let denote

$$\{\Gamma_\omega^{(r)}\} = z_r(\omega)\{F_\omega^{(r)}\}, \tag{10}$$

where $z_r(\omega)$ is the same scale factor as in (9).

If $\cos\varphi_r \neq 0$, then the following problem of latent roots and vectors of a simple matrix pencil can be set up [3]:

$$[[H^I(\omega)] - \tan\varphi_r(\omega)[H^R(\omega)]]\{F_\omega^{(r)}\} = \{0\}. \quad (r = 1, 2, \ldots, N) \tag{11}$$

From the latent roots $\tan\varphi_r$, the characteristic phase angles $\varphi_r(\omega)$ are obtained, which become $-90°$ at the undamped natural frequencies. The latent vectors $\{F_\omega^{(r)}\}$ are proportional to the excitation modal vectors.

The frequency response modal vectors $\{\Phi_\omega^{(r)}\}$ are obtained from

$$[[H^R(\omega)]\cos\varphi_r + [H^I(\omega)]\sin\varphi_r]\{F_\omega^{(r)}\} = \frac{1}{z_r(\omega)}\{\Phi_\omega^{(r)}\}. \tag{12}$$

They represent a specific type of forced response in which all coordinates execute synchronous motion, having the same phase lag with respect to the excitation. Their shape varies with the excitation frequency ω and are produced only in the presence of an external forcing defined by the excitation modal vectors. The solutions $\varphi_r(\omega)$, $\{\Phi_\omega^{(r)}\}$ and $\{\Gamma_\omega^{(r)}$ are termed collectively—the r-th frequency-dependent "characteristic phase -lag mode" [4].

At $\omega = \omega_r$, $\cos\varphi_r = 0$, the r-th phase angle $\varphi_r = -90°$, the r-th frequency response modal vector becomes the r-th normal modal vector $\{\Phi_{\omega_r}^{(r)}\} = \{\Psi^{(r)}\}$ and the r-th excitation modal vector becomes the forcing vector appropriated to the r-th natural mode $\{F_{\omega_r}^{(r)}\} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}$.

Equations (11) and (12) become

$$[H^R(\omega_r)]\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = \{0\}, \tag{13}$$

$$[H^I(\omega_r)]\{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\} = -\frac{1}{z_r(\omega_r)}\{\Psi^{(r)}\}. \tag{14}$$

Equation (14) leads to (9) and equation (13) to

$$\det[H^R(\omega_r)] = 0 \tag{15}$$

which is the basis of Asher's method [5] for locating undamped natural frequencies.

3. Proportional Damping

Equations (11) and (12) are obtained from the condition to have real forcing vectors $\{\hat{f}\}$ which produce coherent phase displacements $\{\hat{x}\}$ having the same phase lag φ with respect to the excitation.

Substitution of the trial solution $\{\tilde{x}\} = \{\hat{x}\}e^{i\varphi}$ into equation (4) yields

$$\{\hat{x}\} = [[H^R(\omega)] + i[H^I(\omega)]]\, e^{-i\varphi}\{\hat{f}\}$$

or, separating the real and imaginary parts,

$$[[H^R] \cos \varphi + [H^I] \sin \varphi]\, \{\hat{f}\} = \{\hat{x}\}, \tag{16}$$

$$[[H^I] \cos \varphi - [H^R] \sin \varphi]\{\hat{f}\} = \{0\}. \tag{17}$$

The vectors $\{\hat{\mathscr{F}}^{(r)}\}$ form a complete linearly independent set, or base, of the vectorial space. An expansion of $\{\hat{f}\}$ is thus always possible (and unique) of the form

$$\{\hat{f}\} = [\hat{\mathscr{F}}]\{\hat{\lambda}\} = \sum_{r=1}^{N} \{\hat{\mathscr{F}}^{(r)}\}\hat{\lambda}_r \tag{18}$$

where $[\hat{\mathscr{F}}]$ is the square matrix having the principal modes of excitation as columns and $\{\hat{\lambda}\}$ is a vector of scalar multipliers.

Substitution of (18) into equation (17) and premultiplication by $[\hat{\mathscr{F}}]^T$ yields

$$[[\tau] \cos \varphi + [\sigma] \sin \varphi]\{\hat{\lambda}\} = \{0\} \tag{19}$$

where

$$\begin{aligned} [\tau] &= -[\hat{\mathscr{F}}]^T[H^I(\omega)][\hat{\mathscr{F}}] \\ [\sigma] &= [\hat{\mathscr{F}}]^T[H^R(\omega)][\hat{\mathscr{F}}]. \end{aligned} \tag{20}$$

It can be shown that in the case of proportional damping $[\tau]$ and $[\sigma]$ are diagonal matrices. Indeed, the dynamic flexibility matrix $[B(\omega)]$ can be written

$$[B(\omega)] = [\Psi]^{-T}[\Psi]^T[B(\omega)][\Psi][\Psi]^{-1} = [\Psi]^{-T}[b(\omega)][\Psi]^{-1}$$

where, based on equations (6)—(8),

$$[b(\omega)] = [\Psi]^T[B(\omega)][\Psi] = [k] - \omega^2[m] + i\omega[c]. \tag{21}$$

In the case of *proportional damping*, the modal damping matrix is diagonal $[c] = [c]$ and the matrix (21) is also diagonal $[b] = [b]$.

The FRF matrix can be written

$$[H(\omega)] = [B(\omega)]^{-1} = [\Psi][h(\omega)][\Psi]^T \tag{22}$$

where

$$[h(\omega)] = [b(\omega)]^{-1}$$

so that the general diagonal element is

$$h_{rr}(\omega) = \frac{1}{k_r - \omega^2 m_r + i\omega c_{rr}}. \tag{23}$$

Equations (9) yields

$$[\Psi]^T[\hat{\mathcal{F}}] = [c]\begin{bmatrix} \omega_r \\ \overline{z_r} \end{bmatrix} \tag{24}$$

It follows that, in the case of proportional damping, the matrix product

$$[\hat{\mathcal{F}}]^T[H(\omega)][\hat{\mathcal{F}}] = [\hat{\mathcal{F}}]^T[\Psi][h(\omega)][\Psi]^T[\hat{\mathcal{F}}] = \begin{bmatrix} \omega_r^2 c_{rr}^2 h_{rr} \\ \overline{z_r^2} \end{bmatrix} = [\sigma_r - i\tau_r]$$

is a diagonal matrix and so are the matrices (20).

If $\cos\varphi \neq 0$, equation (19) becomes

$$[[\tau] + \tan\varphi\,[\sigma]]\{\hat{\lambda}\} = \{0\} \tag{25}$$

which has the form of equation (11).

In order to have nontrivial solutions it is necessary and sufficient that

$$\det\,[[\tau] + \tan\varphi[\sigma]] = 0. \tag{26}$$

This is an algebraic equation of order N in $\tan\varphi$. For each root

$$\tan\varphi_r = -\frac{\tau_r}{\sigma_r} = \frac{-\omega c_{rr}}{k_r - \omega^2 m_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, N) \tag{27}$$

there is a corresponding eigenvector $\{\hat{\lambda}^{(r)}\}$ satisfying the equation

$$[[\tau] + \tan\varphi_r\,[\sigma]]\{\hat{\lambda}^{(r)}\} = \{0\}. \tag{28}$$

Due to the diagonal form of the characteristic matrix, the only non-zero element in $\{\hat{\lambda}^{(r)}\}$ is the r-th element $\hat{\lambda}_r^{(r)}$

$$\{\hat{\lambda}^{(r)}\} = \{I\}_r \hat{\lambda}_r^{(r)}$$

where $\{I\}_r$ is the r-th column of the unity matrix.

Comparison with equation (11) shows that the excitation modal vector $\{\Gamma_\omega^{(r)}\}$ is a solution of equation (28) being proportional to the r-th principal mode of excitation

$$\{\hat{f}\} \equiv \{\Gamma_\omega^{(r)}\} = [\hat{\mathcal{F}}]\{\hat{\lambda}^{(r)}\} = [\hat{\mathcal{F}}]\{I\}_r \hat{\lambda}_r^{(r)} = \{\hat{\mathcal{F}}^{(r)}\}\hat{\lambda}_r^{(r)}.$$

So it has been demonstrated that in case of proportional damping the excitation modal vectors are no longer frequency-dependent. The same applies to the frequency response modal vectors [6].

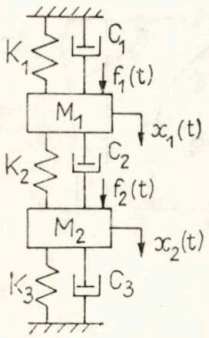


Fig. 1.

4. Numerical Example

The two-degree-of-freedom system from Figure 1, having $M_1 = M_2 = 0.0259$ kg, $K_1 = K_3 = 100$ N/m and $K_2 = 50$ N/m, will be used to illustrate the foregoing theoretical results. The undamped natural frequencies are $\omega_1 = 62.128$ rad/s, $\omega_2 = 87.863$ rad/s and the (orthonormalized) normal modal vectors are

$$\{\Psi^{(1)}\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^T, \{\Psi^{(2)}\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^T$$

Case I. Nonproportional damping. Let consider the following damping coefficients $C_1 = 3$ Ns/m, $C_2 = 2$ Ns/m, $C_3 = 1$ Ns/m. In this case, the matrices of modal parameters are

$$[m] = \begin{bmatrix} 10/386 & 0 \\ 0 & 10/386 \end{bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}, \quad [c] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

The orthonormalized appropriated force vectors are

$$\{\hat{\mathcal{F}}^{(1)}\} = \left\{\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_3^2}} \quad \frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_3^2}}\right\}^T = \left\{\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}^T,$$

$$\{\mathcal{F}^{(2)}\} = \left\{\frac{C_1 + 2C_2}{\sqrt{(C_1+2C_2)^2 + (C_3 + 2C_2)^2}} \quad -\frac{C_3 + 2C_2}{\sqrt{(C_1+2C_2)^2 + (C_3+2C_2)^2}}\right\}^T =$$

$$= \left\{\frac{7}{\sqrt{74}} \quad -\frac{5}{\sqrt{74}}\right\}^T.$$

The frequency dependence of the elements of modal vectors $\{F_\omega^{(r)}\}$ and $\{\Phi_\omega^{(r)}\}$ is shown in Figures 2—5 (solid lines). The strong variation with frequency of these quantities proves the existence of nonproportional damping.

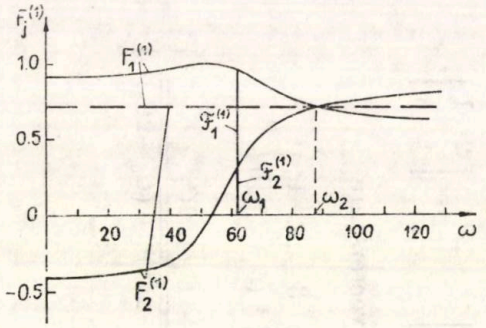


Fig. 2

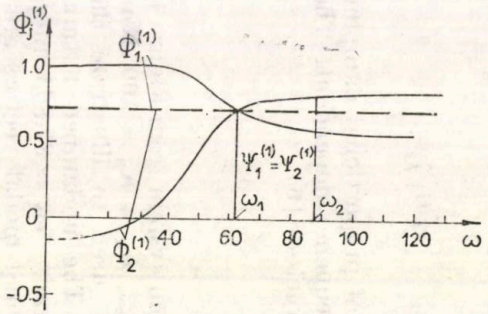


Fig 3

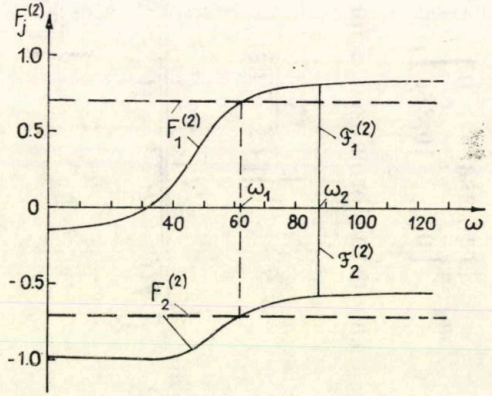


Fig. 4

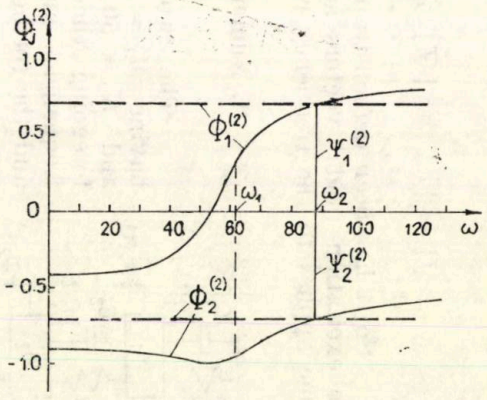


Fig. 5

Case II. Proportional damping. If $C_1 = 2$ Ns/m, $C_2 = 1$ Ns/m, $C_3 = 2$ Ns/m, the modal damping matrix becomes

$$[c] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

denoting proportional damping.

The (orthonormalized) appropriated force vectors are

$$\{\hat{F}^{(1)}\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^T \quad \{\hat{F}^{(2)}\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^T.$$

The elements of modal vectors $\{F_\omega^{(r)}\}$ and $\{\Phi_\omega^{(r)}\}$ are plotted versus frequency in Figures 2—5 with dotted lines. Their graphs are horizontal straight lines. This independence of frequency provens the existence of proportional damping.

5. Concluding Remarks

A technique is presented to ascertain whether the damping is of the proportional or nonproportional type.

The full FRF matrix has to be experimentally determined at discrete frequencies covering the range of interest. Multipoint excitation and simultaneous acquisition of response data is recommended to avoid inconsistencies in FRF data [7]. A generalised eigenvalue problem is repeatedly solved at all measurement frequencies. The values of the orthonormalized eigenvectors are plotted against frequency. If they are not frequency-dependent the system damping can be considered to be of the proportional type.

Experimental work to assess the applicability of the method is in progress.

REFERENCES

1. *G. B. Warburton, S. R. Soni*, Errors in response calculations for non-classically damped structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 5, p. 365—376 (1977).
2. *B. F. de Veubeke*, Acad. R. Belgique, Bulletin Classe Sciences, 5e serie, vol. 34, p. 626—641 (1948).
3. *M. Radeș*, Buletinul I.P.B. Seria Construcții de mașini, vol. 46, p. 66—73 (1984—85).
4. *W. L. Hallauer, J. F. Stafford*, Shock and Vibration Bulletin, vol. 48, No. 1, p. 49—63 (Sept. 1978).
5. *G. W. Asher*, A method of normal mode excitation utilizing admittance measurements, Proc. Nat. Specialists Meeting on Dynamics and Aeroelasticity, Fort Worth, p. 69—76 (1958).
6. *R. E. D. Bishop, G. M. L. Gladwell*, An investigation into the theory of resonance testing, Phil. Trans. Royal Society of London, Series A, vol. 255, p. 241—280 (1963).

7. *M. Radeş*, Shock and Vibration Digest, vol. 17, No 6, p. 3—15 (June 1985).

O metodă de stabilire a existenței amortizării proporționale

Se propune o metodă de analiză dinamică a structurilor bazată pe măsurarea matricei funcțiilor de răspuns în frecvență și identificarea modurilor de vibrație cu defazaje caracteristice. Se arată că la sistemele cu amortizare neproporțională atît vectorii modurilor forțate de vibrație cît și vectorii modurilor de excitație sînt funcții de frecvență. La sistemele cu amortizare proporțională vectorii modali respectivi sînt independenți de frecvența perturbatoare. Această observație poate fi utilizată drept criteriu de identificare a tipului de amortizare — proporțională sau neproporțională — dintr-o structură reală.

C. Z.: 629. 7: 662, 6
519. 688

CONTRIBUȚII PRIVIND ALGORITMUL ȘI PROGRAMUL DE CALCUL PENTRU DETERMINAREA CONSUMULUI DE COMBUSTIBIL AL AUTOVEHICULELOR CU TRANSMISIE HIDROMECANICĂ

A. P. STOICESCU *

În lucrare se prezintă o metodă numerică pentru calculul consumului de combustibil al autovehiculelor cu transmisie hidromecanică (hidrotransformator și schimbător de viteze mecanic în trepte) atît în regim uniform, cît și în regim variabil, inclusiv la deplasarea în cicluri. Se dau detalii care ușurează întocmirea unui program pentru calculatoare numerice. Se prezintă particularitățile programului de calcul întocmit, care a fost codificat în limbaj FORTRAN.

Programul oferă posibilitatea unui studiu rapid al influenței diverșilor factori asupra consumului de combustibil.

1. Introducere

Determinarea consumului de combustibil al autovehiculului cu transmisie hidromecanică se face în mod obișnuit prin utilizarea metodelor grafice, atît la regim uniform [7, 9, 10], cît și la regim nestaționar [3]. S-au propus și metode analitice [5], dar ele recurg la simplificări privitoare la caracteristicile hidrotransformatorului și, mai ales, la cele de consum ale motorului care, în multe cazuri, pot conduce la erori însemnate. Metoda numerică pentru regimul nestaționar prezentată în [8] recurge la considerarea unor valori medii care nu asigură în toate cazurile o precizie corespunzătoare. În literatura de specialitate se fac referiri la utilizarea mijloacelor rapide pentru calculul consumului de combustibil al autovehiculelor cu transmisie hidromecanică la diverse regimuri de mișcare (a se vedea, de pildă, [11]), fără însă a se da informații cu privire la metodele efectiv folosite.

În lucrarea de față se prezintă un algoritm și un program de calcul al consumului de combustibil al autovehiculului cu transmisie hidromecanică atît în regim uniform de mișcare, cît și în regim variabil. Programul elaborat este adecvat pentru determinarea consumului de combustibil la deplasarea în cicluri, cu faze care pot fi alese după necesități.

3. Caracteristica de consum la regim uniform

Se fac următoarele notații: M [daN·m] — momentul motor; M_i[daN·m] — momentul de intrare la pompa hidrotransformatorului; M_e[daN · m] — momentul de ieșire din turbina hidrotransformatorului; k_1 [daN · m · min^{-2}] — coeficientul pompei; k_M — raportul de trans-

* Conf. dr. ing., catedra Autovehicule rutiere

formare al hidrotransformatorului; n_e [l/min] — turația turbinei; i_0 — raportul de transmitere al angrenajului în unghi; i_{sj} — raportul de transmitere al treptei j; $i_t = i_0 i_{sj}$ — raportul total de transmitere al părții mecanice a transmisiei; η_{tM} — randamentul părții mecanice a transmisiei corespunzător pierderilor produse de cuplul transmis; $i_h = n_e/n$ — raportul hidraulic; r_r [m] — raza de rulare a roților motoare; V [km/h], v [m/s] — viteza autovehiculului; C_h [kg/h] — consumul orar de combustibil al motorului; c_e [g/kWh] — consumul specific efectiv de combustibil; χ [mm sau grade] — sarcina motorului; C^l_{100} [l/100 km] — parametrul consumului de combustibil; γ [kg/dm^3] — densitatea combustibilului; R^0_0 [daN] — rezistența aferentă pierderilor de mers în gol la viteză foarte mică; k [daN $\cdot$ m$^{-4} \cdot$ s^2] — coeficientul aerodinamic; A [m^2] — aria secțiunii transversale maxime: f_0 — coeficientul de rezistență la rulare pentru viteza foarte mică; f_{01}, f_{02} — coeficienți de influență a vitezei asupra coeficientului de rezistență la rulare; α — unghiul de înclinare longitudinală a pantei; n_{sa} — numărul de subansamble ale părții mecanice a transmisiei; G_a [daN] — greutatea autovehiculului; ψ — rezistența specifică a drumului; a_1 — coeficient de influență a vitezei asupra pierderilor în transmisie; P [kW] — puterea motorului; n [l/min] — turația motorului.

Caracteristica de consum în regim uniform este dată de dependența

$$C^l_{100} = f_c(\psi, V, j) \tag{1}$$

unde j reprezintă numărul treptei în care se află cuplat schimbătorul de viteze.

Există relația cunoscută [16]:

$$C^l_{100} = \frac{C_e(n, \chi) P}{10 \gamma V} \tag{2}$$

astfel încît, pentru ψ și V date trebuie determinate n, χ și P, funcția $C_e(n, \chi)$ presupunîndu-se cunoscută.

Dacă ΣR este suma rezistențelor la înaintare și a rezistenței echivalente pierderilor de mers în gol în partea mecanică a transmisiei atunci se poate scrie:

$$M_e = \frac{r_r \Sigma R}{i_0 i_{sj} \eta_{tm}}$$

sau încă, exprimînd convenabil pe ΣR [15],

$$M_e = \frac{r_r}{i_0 i_{sj} \eta_{tm}} \cdot f_0 G_a \cos\alpha + \frac{r_r n_{sa}}{\eta_{tm} i_0 i_{sk}} \cdot R^0_0 + \frac{r_r}{\eta_{tm} i_0 i_{sk}} G_a \sin\alpha +$$

$$+ \frac{r_r}{i_0 i_{sj} \eta_{tm}} (f_{01} G_a \cos\alpha + a_1) V + \frac{r_r}{\eta_{tm} i_0 i_{sk}} \left(f_{02} G_a \cos\alpha + \frac{kA}{13} \right) V^2. \tag{3}$$

De asemenea, se mai pot scrie relațiile

$$n_e = \frac{i_0 i_{sj}}{0{,}377\, r_r} \cdot V, \tag{4}$$

$$M_e = M k_M = k_1(i_h) k_M(i_h)\, n^2 = k_1(i_h) k_M(i_h) \frac{n_e^2}{i_h^2}. \tag{5}$$

Deci, pentru o viteză dată se pot calcula M_e și n_e cu ajutorul relațiilor (3) și, respectiv, (4), astfel încît relația (5) constituie o ecuație neliniară în i_h. Relația (5) se poate pune sub forma

$$i_h = \sqrt{F(i_h)} \tag{6}$$

unde $$F(i_h) = \frac{n_e^2}{M_e} \cdot k_1(i_k) \cdot k_M(i_h). \tag{7}$$

Ecuația (6) se poate rezolva prin metoda iterației simple. Folosind condiția de convergență a procesului iterativ se ajunge la inegalitatea

$$|F'(i_h)| < 2\sqrt{F(i_h)}. \tag{8}$$

Or, se constată că $F'(1,0) \neq 0, F(0) = 0$, ceea ce arată clar că la valori mari ale lui i_h, apropiate de 1, convergența nu mai este asigurată. Este o situație similară cu cea examinată în [17]. Din acest motiv, dacă în procesul de mai sus se ajunge la $i_h > 1,0$ se rezolvă ecuația (6) prin metoda bisecției, intervalul inițial pentru i_h fiind (0,1). Dacă i_{hr} este rădăcina ecuației (6), sînt îndeplinite condițiile :

$$i_h < i_{hr} \Rightarrow i_h - \sqrt{F(i_h)} < 0, \; i_h > i_{hr} \Rightarrow i_h - \sqrt{F(i_h)} > 0. \tag{9}$$

Cunoscînd i_h se determină turația motorului, cuplul motor și puterea P cu relațiile

$$M = M_e/k_M(i_h), \; n = n_e/i_h, \; P = \frac{M\,n}{955}. \tag{10}$$

Rămîne în continuare să se calculeze consumul specific efectiv de combustibil al motorului folosind datele obținute la experimentarea acestuia pe stand. În acest scop se aplică metoda interpolării în două variabile.

Fie $\chi_j (j = 1, 2, \ldots, N_s$, unde N_s este numărul pozițiilor organului de comandă al motorului), sarcinile pentru care s-au determinat la stand momentul motor și consumul orar pentru diferite turații $n_k (k = 1, 2, \ldots, N_t$, unde $N_t(j)$ este numărul total de puncte aferent sarcinii χ_j). La turația dată n se determină cuplul M_j aferent sarcinii χ_j folosind fie interpolarea liniară, fie interpolarea cu funcții spline. Apoi se determină indicele p astfel încît să fie îndeplinită condiția

$$M_p < M < M_{p+1}. \tag{11}$$

Cuplului M îi corespunde sarcina χ care satisface condiția

$$\chi_{p+1} < \chi < \chi_p. \tag{12}$$

Valoarea lui χ se determină prin interpolare liniară sau interpola cu funcţii spline.

La turaţia n se determină prin interpolare consumul orar C_{hj} af rent sarcinii χ_j, apoi se determină consumul orar C_h prin interpolar valoarea sa satisfăcînd condiţia

$$C_{hp+1} < C_h < C_{hp}. \tag{1.}$$

Consumul specific efectiv se calculează cu relaţia

$$C_e = \frac{C_h \cdot 1000}{P}. \tag{1.}$$

Înainte de determinarea consumului specific efectiv de combustib este necesar să se verifice dacă regimul de funcţionare a motorului es realizabil. Caracteristica exterioară fiind $M_{ex}(n)$, regimul de funcţiona este realizabil dacă

$$M \leqslant M_{ex}(n). \tag{1.}$$

În caz contrar, regimul este nerealizabil pentru ψ şi V date.

Dacă $\Delta\psi$ şi ΔV rerpezintă pasul pentru rezistenţa specifică a dr mului şi, respectiv, viteza autovehiculului, se definesc $\psi_p = \psi_{p-1} + \Delta$

$$V_q = V_{q-1} + \Delta V \ (p = 1, 2, \ldots., \ q = 1, 2, \ldots) \tag{1.}$$

unde ψ_0 şi V_0 sîn valorile iniţiale aferente mărimilor ψ şi V.

Pentru j şi p date se calculează cu metoda prezentată mai s $f_e(\psi_p, V_q, k)$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ pentru valorile lui q la care este îndeplini condiţia (15). Calculele se repetă pentru valori crescătoare ale lui În felul acesta se poate trasa prin puncte caracteristica de consur

Pe baza celor prezentate mai sus s-a elaborat un program de calc al caracteristicii de consum la regim uniform. Schema logică corespunz toare este prezentată într-o formă simplificată în figura 1. S-a avut vedere o transmisie hidromecanică cu un schimbător de viteze avînd u număr de NTR trepte, ultima constînd în blocarea hidrotransformat rului. Se utilizează 7 subrutine şi anume : SPLICO pentru calculul coe cienţilor funcţiei spline pentru interpolare cubică; SPLINE pentru i terpolare liniară sau cu funcţii spline; CUPLU pentru definirea cara teristicii exterioare; RCU pentru calculul raportului de transformar CTR penrtu calculul coeficientului pompei; CNSE pentru calculul co sumului specific efectiv de combustibil; CURBA pentru construir simultană a mai multor curbe.

Pentru ultima treaptă se ţine seama că $i_h = 1{,}0$ şi $k_M = 1{,}0$, astf încît calculele se simplifică.

Programul de calcul a fost codificat în limbaj FORTRAN, el co ţinînd cca 600 instrucţiuni. El asigură şi trasarea prin puncte a caract risticii de consum.

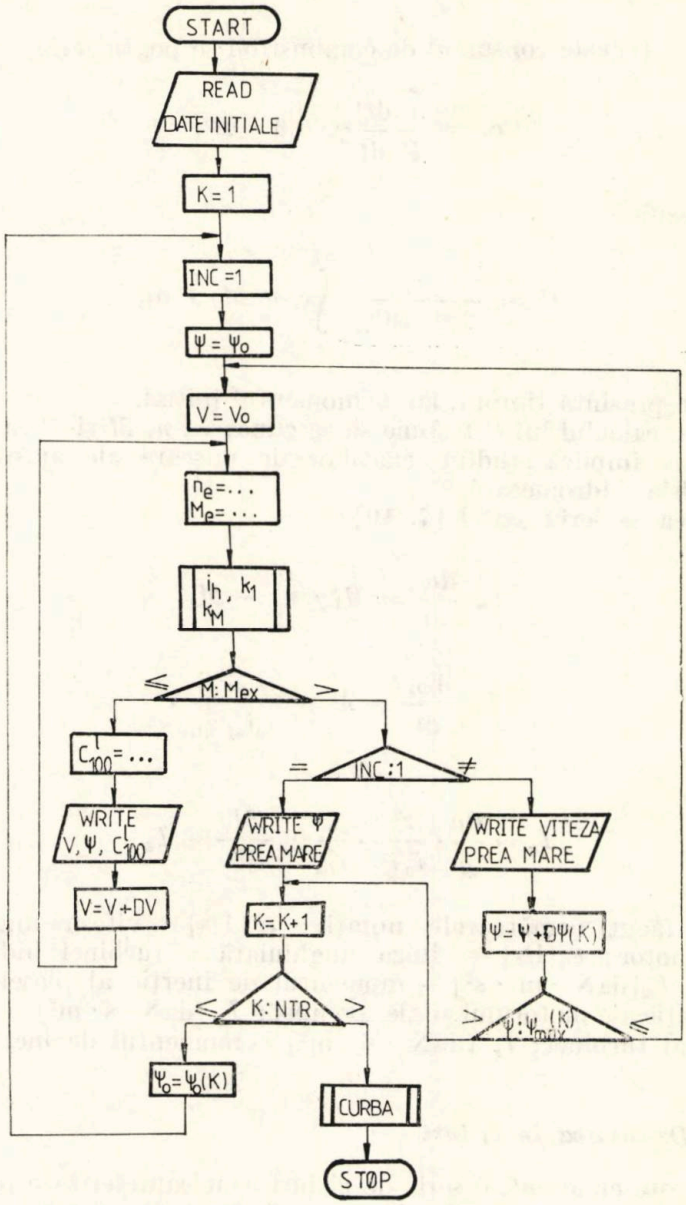


Fig. 1 — Schema logică simplificată a programului pentru determinarea caracteristicii de consum în regim uniform.

3. Caracteristica de consum la regim variabil

Dacă C [l] este consumul de combustibil se poate scrie

$$c_e = \frac{1}{P}\frac{dC}{dt}\gamma \cdot 3{,}6 \cdot 10^6,$$

din care rezultă

$$C = \frac{1}{3{,}6 \cdot 10^6 \gamma} \cdot \int_{t_0}^{t} c_e(n, M)\, P\, dt, \tag{17}$$

unde t [s] reprezintă timpul, iar t_0 momentul inițial.

Pentru calculul lui C trebuie să se cunoască n, M și P ca funcții de timp, ceea ce implică studiul ecuațiilor de mișcare ale autovehiculului cu transmisie hidromecanică.

Acestea se scriu astfel [7, 10]:

$$I_m \cdot \frac{d\omega}{dt} = M(\chi, n) - M_t, \tag{18}$$

$$I_a \cdot \frac{d\omega_e}{dt} = M_e - \frac{r_r \Sigma R}{i_0 i_{sj} \eta_{tm}}, \tag{19}$$

unde:

$$I_a = \frac{Ga}{g} \cdot \frac{r_r^2}{i_0^2 i_{sj}^2} \cdot \frac{1}{\eta_{tm}^2} + \frac{\Sigma I_r}{i_0^2 i_{sj}^2} + I_2. \tag{20}$$

S-au făcut următoarele notații: ω [1/s] — viteza unghiulară a arborelui motor; ω_e[1/s] — viteza unghiulară a turbinei hidrotransformatorului; I_m[daN · m · s²] — momentul de inerție al pieselor în mișcare de rotație ale motorului și ale pompei; I_2 [daN · s · m²] — momentul de inerție al turbinei; I_r [daN · s · m²] — momentul de inerție al unei roți.

3.1. *Deplasarea în cicluri*

Cum este cunoscut, o serie de cicluri sînt caracterizate prin faze cu accelerații constante. Este de observat că, în multe situații, chiar regimurile reale complexe de mișcare pot fi aproximate destul de bine cu cele care, pe porțiuni, au accelerații constante.

Dacă v [m/s] este viteza autovehiculului atunci este valabilă relația

$$v = \frac{r_r}{i_0 i_{sj}} \omega_e. \tag{21}$$

Exprimînd convenabil pe M_e și ținînd seama de (21) ecuația (19) se mai scrie

$$k_M(i_h)k_1(i_h)\frac{n_e^2}{i_h^2} = \frac{r_r \cdot \Sigma_R}{i_0 \cdot i_{sj}\eta_{tm}} + I_a \frac{i_0 i_{sj}}{r_r}\frac{dv}{dt}. \tag{22}$$

Fiind dată viteza V, cu relația (4) se determină n_e, iar cu relațiile cunoscute [15] se calculează ΣR. Pentru o accelerație dv/dt dată se poate calcula valoarea membrului doi al ecuației (22), astfel încît aceasta reprezintă o ecuație în i_h analogă ecuației (5), care se rezolvă, deci, în modul arătat anterior.

Din relația (18) se obține

$$M = \frac{30}{\pi} I_m \cdot \frac{dn}{dt} + k_1(i_h)\frac{n_e^2}{i_h^2}, \tag{23}$$

astfel că pentru calculul lui M mai este necesar să se determine dn/dt. Cunoscînd i_h și n_e se poate determina n, astfel că, prin derivare numerică, se poate obține dn/dt. În cazul particular de față este mai simplu să se calculeze direct derivînd în raport cu timpul relația (22). Deci, ținînd seama că $dv/dt = \text{const.}$ rezultă:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\dfrac{r_r}{i_0 i_{sj}\eta_{tm}} \cdot \dfrac{d\Sigma R}{dt} - n^2 \cdot \dfrac{d(k_M k_1)}{di_h} \cdot \dfrac{di_h}{dt}}{2n\, k_M(i_h)k_1(i_h)}. \tag{24}$$

Exprimînd pe ω_e în funcție de n în relația (21) și derivînd în raport cu timpul se obține

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{30}\frac{r_r}{i_0 i_{sj}}\left(n\frac{di_h}{dt} + i_h\frac{dn}{dt}\right). \tag{25}$$

Eliminînd di_h/dt între relațiile (24) și (25) rezultă

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\dfrac{r_r}{i_0 i_{sj}\eta_{tm}} \cdot \dfrac{d\Sigma R}{dt} - \dfrac{30}{\pi}\dfrac{i_0 i_{sj}}{r_r}\dfrac{dv}{dt} n \dfrac{d(k_1 k_M)}{di_h}}{n\left[2k_1 k_M - i_h \dfrac{d(k_1 k_M)}{di_h}\right]}. \tag{26}$$

Apoi se ține seama că

$$\frac{d(k_1 k_M)}{di_h} = \frac{dk_1(i_h)}{di_h} \cdot k_M(i_h) + \frac{dk_M(i_h)}{di_h} \cdot k_1(i_h). \tag{27}$$

Pentru calculul derivatelor dk_1/di_h și dk_M/di_h se pot folosi metode numerice sau se pot utiliza expresiile polinomiale pentru k_1 și k_M [17] derivatele exprimîndu-se în acest caz fără nici un fel de dificultate.

Așadar, pentru i_h calculat ca mai sus cu relațiile (27) și (26) se determină valoarea lui dn/dt și, apoi, cu relația (23) momentul motor M. Calculul lui n și P se efectuează cu ajutorul ultimelor două relații (10). Apoi, cu metoda arătată la 2, se determină $C_e(n, M)$.

Prin urmare, pentru t dat, fiind cunoscute viteza inițială și accelerația constantă a autovehiculului, se determină viteza V, și, în continuare prin folosirea metodei prezentate mai sus, se calculează valoarea funcției de sub integrala (17), ceea ce permite aplicarea uneia din metodele numerice cunoscute pentru calculul acestei integrale, respectiv al cantității de combustibil consumat.

Evident, în prealabil trebuie făcută verificarea dacă regimul respectiv de mișcare este realizabil, ceea ce impune verificarea inegalității (15).

Mai este necesar ,de asemenea, să se cunoască treapta schimbătorului de viteze care este cuplată. În acest scop trebuie să se cunoască legea de schimbare a treptelor. Cum se știe, o anumită treaptă se cuplează în funcție de sarcina motorului și de viteza de deplasare a autovehiculului. Pentru trecerea din treapta j în treapta $j + 1$, sarcina χ_s va fi definită de legea de schimbare

$$\chi_s = S(V, j) \tag{28}$$

unde S este o funcție unoscută, dată dinainte.
Fie

$$E_j = \chi - S(V, j). \tag{29}$$

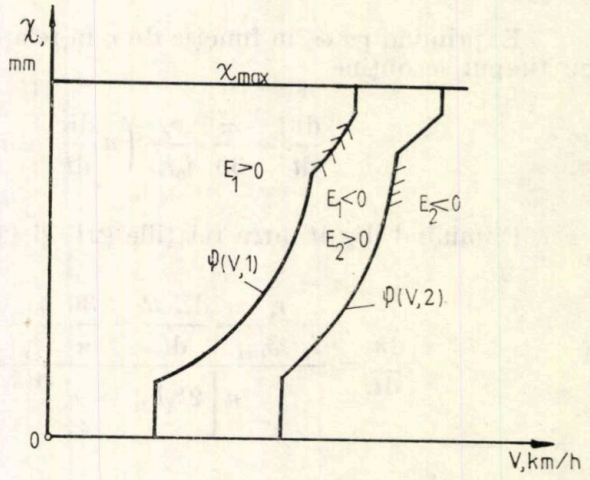


Fig. 2 — Legea de schimbare a treptelor schimbătorului de viteze.

Dacă pentru j dat, la regimul de mișcare caracterizat prin V și χ, rezultă $E_j > 0$, atunci trebuie să fie efectiv cuplată treapta $k \leqslant j$ (vezi fig. 2). Pentru $E_j = 0$, se consideră că trebuie să fie efectiv cuplată treapta j. Așadar, pentru faza m a ciclului, caracterizată prin viteza inițială $V_{cic}(m)$

i viteza finală $V_{cic}(m+1)$, pentru a stabili treapta inițială se proce-ează după cum urmează. Se adoptă $j = 1$ și se verifică semnul lui E_1 entru viteza inițială a fazei. Dacă $E_1 \geqslant 0$, evident treapta inițială k_{in} e trebuie efectiv cuplată va fi $k_{in} = 1$. Dacă $E_1 < 0$, atunci $k_{in} > 1$, stfel că se determină k_{in} care satisface condițiile

$$E_{k_{in}-1} < 0, \qquad E_{k_{in}} > 0.$$

Evident, este posibil ca la viteza inițială a fazei regimul să nu fie ealizabil pentru $k_{in} = 1$, ceea ce arată că ciclul ales nu este adecvat, ind necesară reconsiderarea lui. Dacă pentru $k_{in} \neq 1$ se constată că, o anumită viteză, accelerația impusă nu este realizabilă, se face trecerea treapta imediat inferioară și se procedează la verificarea condiției (15). cazul acesta este satisfăcută, treapta respectivă este efectiv cuplată. acă relația menționată nu este satisfăcută se face trecerea în etajul ferior și operațiile se repetă.

Pentru fiecare fază a ciclului trebuie stabilite atît treapta inițială, t și vitezele de trecere în treptele următoare. În scopul determinării vite-lor de trecere se procedează în felul următor. Considerînd cuplată treapta se verifică dacă la viteza $V_{cic}(m+1)$ este necesară schimbarea. În z afirmativ, se consideră un număr de intervale de timp N_{it} al duratei a fazei m și timpii

$$t_i = \frac{\tau_m}{N_{it}} \cdot i, \; i = 0, 1, 2, \ldots, N_{it}. \tag{30}$$

Acestor timpi le corespund vitezele

$$V_i = V_{cic}(m) + \frac{V_{cic}(m+1) - V_{cic}(m)}{\tau_m} \cdot t_i. \tag{31}$$

Pentru k_{in}, în ordinea crescătoare a lui i se determină ca mai sus ametrii regimului de mișcare, pînă cînd se găsește un indice p pentru e este îndeplinită condiția $E_{k_{in}} < 0$.

Dacă t_s este momentul schimbării treptei, acesta îndeplinește diția

$$t_s \in (t_{p-1}, t_p]. \tag{32}$$

În definitiv E_j este o funcție de timp, adică

$$E_j = \mathcal{E}\,(t, j). \tag{33}$$

Din cele de mai sus rezultă că t_s satisface ecuația

$$\mathcal{E}\,(t_s, k_{in}) = 0, \tag{34}$$

rei soluție se poate determina prin metoda bisecției, ținînd seama de (32). Odată determinat t_s, este găsită și valoarea vitezei de schimbare, ă care se procedează la verificarea necesității schimbării din etajul

k_{in+1} în etajul următor. Viteza de schimbare se determină ca și mai înaint procesul repetîndu-se de cîte ori apare necesitatea.

Pentru determinarea vitezei și a timpului t_a la care accelerația ir pusă nu poate fi realizată se testează condiția (15) pentru timpii de niți de (30). Astfel, poate exista un indice q pentru care condiția (1 nu este îndeplinită. Deci timpul t_a îndeplinește condițiile

$$M(t_a) - M_{ex}(t_a) = 0, \tag{3}$$

$$t_a \in [t_{q-1}, t_q]. \tag{3}$$

Ecuația (35) se rezolvă fără dificultate prin metoda înjumătăți intervalului, cel inițial fiind definit în (36).

Pentru faza m a ciclului distanța parcursă corespunzătoare timpul t va fi

$$S = \frac{V_{cic}(m)}{3{,}6} \cdot t + \frac{V_{cic}(m+1) - V_{cic}(m)}{3{,}6\,\tau_m} \cdot \frac{t^2}{2} \text{ [m]}. \tag{3}$$

Se poate calcula consumul mediu de cobustibil

$$C^1_{100} = \frac{C}{S} 10^5, \tag{3}$$

atît pentru fiecare fază a ciclului, cît și pentru întregul ciclu consideri suma valorilor corespunzătoare lui C și S.

Există faze ale ciclului cu mers în gol sau mers în gol forțat.

Pentru mersul în gol

$$C = \frac{1}{3{,}6 \cdot 10^6 \gamma} \cdot C_{gol} \cdot t, \tag{3}$$

unde C_{gol}[g/h] reprezintă consumul în gol al motorului.

La mersul în gol forțat, la frînare cu motorul, fără întrerupe alimentării, se poate scrie

$$C = \frac{1}{3{,}6.10^6 \cdot \gamma} \cdot \int_0^{\tau} (C_{gol} + C' \cdot n) \cdot dt, \tag{3}$$

unde $C'\left[\frac{g}{h \cdot rot/min}\right]$ reprezintă un coeficient de creștere al consum cu turația, iar τ timpul curent fazei respective a ciclului. Exprimînd n în funcție de V rezultă în final

$$C = \frac{1}{3{,}6 \cdot 10^6 \gamma} \cdot C_{gol}\,\tau + \frac{2{,}66}{3{,}6 \cdot 10^6} \cdot \frac{i_0 i_{sf}}{r_r \gamma} C' \left[V_0 \tau + \frac{V_{cic}(m+1) - V_{cic}(m)}{3{,}6m} \cdot \tau \right.$$

unde j reprezintă numărul treptei cuplate, care se poate stabili ușor considerînd $\chi = 0$.

În cazul că ultima treaptă a schimbătorului de viteze este obținută prin blocarea hidrotransformatorului au loc egalitățile $M_i = M_e$, $\omega = \omega_e$, astfel că din ecuațiile (18) ș (19) rezultă

$$M(\chi, n) = (I_a + I_m)\frac{d\omega}{dt} + \frac{r_r \Sigma R}{i_0 i_{sk} \eta_{tm}} = (I_a + I_m)\frac{i_0 i_{sk}}{r_r}\frac{dv}{dt} + \frac{r_r \Sigma R}{i_0 i_{sk} \eta_{tm}}. \tag{42}$$

Pentru V determinat cum s-a arătat mai înainte și accelerația dată, cu relația (41) se calculează M. Cu relația (4) se determină $n = n_e$, apoi se calculează χ și $C_e(n, \chi)$ astfel că determinarea cantității de combustibil nu prezintă dificultate.

3.2. *Deplasarea cu accelerație variabilă*

De regulă, în condiții reale de circulație accelerația autovehiculului este variabilă și aceasta chiar la deplasarea în cicluri. Din acest motiv în cele ce urmează se va prezenta modul de determinare a consumului de combustibil și în acest caz.

Impunînd legea $\chi(t)$ și condițiile inițiale adecvate se pot integra ecuațiile de mișcare (18), (19), care conduc astfel la determinarea lui n, M, P ca funcții de timp, ceea ce permite calculul integralei (17). Este preferabilă, însă, o abordare puțin diferită.

Astfel se poate scrie

$$\frac{dC}{dt} = 3{,}87849 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot C_e(M(\chi, n), n) M(\chi, n) \cdot n \tag{43}$$

sau încă

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C_h(\chi, n)}{3{,}6 \cdot 10^3 \gamma}. \tag{44}$$

Ecuațiile (18) și (19) pot fi aduse la forma normală astfel

$$\frac{dn}{dt} = \frac{30}{\pi I_m} M(\chi, n) - \frac{30}{\pi I_m} k_1\left(0{,}377 \frac{i_0 i_{sj}}{r_r} \cdot \frac{V}{n}\right) \cdot n^2, \tag{45}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3{,}6\, r_r}{i_0 i_{sj} I_a} k_M\left(0{,}377 \frac{i_0 i_{sj}}{r_r} \cdot \frac{V}{n}\right) k_1\left(0{,}377 \frac{i_0 i_{sj}}{r_r} \frac{V}{n}\right) n^2 - \frac{3{,}6 r_r^2 \Sigma R}{(i_0 i_{sj})^2 \eta_{tm} \cdot I_a}. \tag{46}$$

Dacă S_d este spațiul de demarare se poate scrie

$$\frac{dS_d}{dt} = \frac{V}{3{,}6}. \tag{47}$$

Aşadar, există sistemul de patru ecuaţii diferenţiale (43) sau (44), (45), (46) şi (47), cu patru necunoscute n, V, S_d şi C, adus la forma normală care se poate integra numeric cu una din metodele uzuale. În general este de preferat să se folosească ecuaţia (44) întrucît la experimentările pe stand se determină direct consumul orar al motorului.

În cazul cînd ultima treaptă este cu hidrotransformatorul blocat, în locul ecuaţiilor (45) şi (46) se utilizează ecuaţia (42), care se scrie şi astfel

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3{,}6\, r_r}{i_0 i_{sk}(I_a + I_m)} \cdot M\left(\chi, \frac{2{,}66 i_0 i_{sk}}{r_r} V\right) - \frac{3{,}6\, r_r^2}{(i_0 i_{sk}) 2 \eta_{tm}} \cdot \frac{\Sigma R}{(I_a + I_m)}, \tag{48}$$

Deci sînt trei ecuaţii (44), (47) şi (48) cu trei necunoscute V, S_d şi C. În ecuaţiile (44) turaţia se exprimă direct în funcţie de viteză.

Pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale prezentate este necesară precizarea condiţiilor iniţiale. Pentru fiecare fază a ciclului, în momentul de început al acesteia se adoptă $C = 0$, $V = V_{cic}(m)$, $S_d = 0$. În privinţa condiţiei iniţiale pentru turaţia motorului se dau detalii într-o altă lucrare [17] în care se discută detaliat şi condiţiile iniţiale la trecerea dintr-o teraptă în alta în timpul demarajului. Evident, trebuie precizate vitezele la care se face trecerea dintr-o treaptă în alta. În acest scop se calculează valoarea expresiei E_j. Dacă, la un moment dat t se constată că $E_j < 0$, atunci trebuie să se cupleze treapta următoare. Dacă Δt este pasul timpului pentru care se cunosc valorile variabilelor integrate, atunci timpul de schimbare a treptei t_s va aparţine intervalului $(t - \Delta t, t)$. Determinarea timpului t_s se va face prin metoda bisecţiei, astfel încît să fie satisfăcută ecuaţia $E(t_s, j) = 0$.

Un caz particular al regimului cu acceleraţie variabilă este acela cu $\chi = \text{const}$. În această situaţie se pot considera cicluri cu acceleraţii variabile, inclusiv cînd motorul funcţionează la sarcina maximă.

3.3. *Program de calcul pentru deplasarea în cicluri*

Pe baza celor arătate la 3.1. şi 3.2. s-a elaborat un program de calcul pentru consumul de combustibil la deplasarea autovehiculului în cicluri, caracterizate prin faze cu acceleraţii constante. Schema logică corespunzătoare este prezentată într-o formă simplificată în fig. 3. Se utilizează 17 subprograme dintre care SPLICO, SPLINE, CUPLU, RCU, CTR, şi CNSE au fost prezentate la programul de la 2. Celelalte subprograme sînt următoarele: SIMPSON pentru calculul integralei definite cu metoda Simpson cu pas variabil; ECITER pentru determinarea soluţiei ecuaţiei (22); CUPLS pentru calculul cuplului motor în funcţie de sarcină şi turaţie; SARS pentru definirea sarcinii la care se face trecerea, în funcţie de viteză, la o altă treaptă; RUNGE pentru integrarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu metoda Runge-Kutta cu alegerea automată a pasului; RKSTEP — subrutina în cadrul subprogramului precedent; VALF pentru calculul valorilor

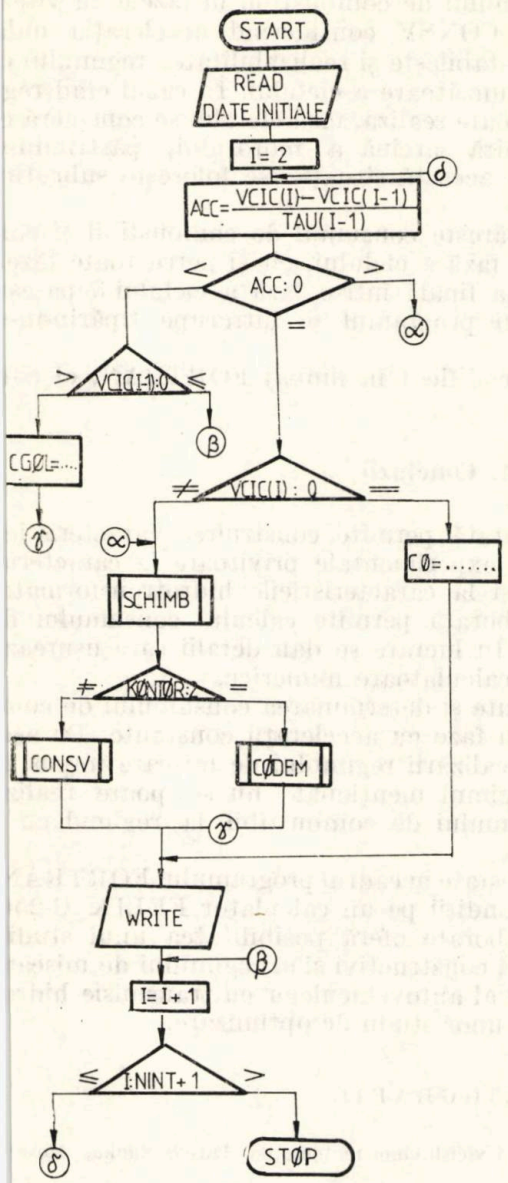


Fig. 3 — Schema logică simplificată a programului pentru determinarea consumului de combustibil la deplasarea în cicluri.

ncţiilor din membrul doi ale sistemului de ecuaţii diferenţiale; FUN ineşte funcţia de sub integrala din relaţia (17), în cazul fazei cu acceaţie constantă; CONSV calculează consumul de combustibil la regimul accelerație constantă; SCHIMB pentru stabilirea treptei inițiale și a ezelor de trecere dintr-un etaj în altul; CODEM pentru calculul consului de combustibil la regimul cu accelerație variabilă; VMAX pentru culul vitezei maxime într-o anumită treaptă.

Pentru determinarea consumului de combustibil în fazele cu vitez constantă s-a folosit subrutina CONSV considerînd accelerația nul În cadrul subrutinei SCHIMB se stabilește și realizabilitatea regimului d mișcare impus pentru faza corespunzătoare a ciclului. În cazul cînd reg mul respectiv de mișcare anu se poate realiza, faza ciclului se consideră c accelerație variabilă, cu o anumită sarcină a motorului, păstrîndu-s vitezele $V_{cic}(m)$ și $V_{cic}(m+1)$. În această situație se folosește subrutin CODEM.

Programul calculează și tipărește consumul de combustibil și co sumul mediu atît pentru fiecare fază a ciclului, cît și petru toate faze anterioare. În situația cînd viteza finală într-o fază a ciclului depășeș viteza maximă a autovehiculului programul se întrerupe tipărindu-s un mesaj corespunzător.

Programul elaborat a fost codificat în limbaj FORTRAN, el co ținînd cca 1 200 instrucțiuni.

4. Concluzii

a) Metoda numerică prezentată permite construirea caracteristic de consum prin folosirea datelor experimentale privitoare la caracteri ticile de consum ale motorului și la caracteristicile hidrotransformat rului. De asemenea, metoda elaborată permite calculul consumului d combustibil și în regim variabil. În lucrare se dau detalii care ușureaz întocmirea unui program pentru calculatoare numerice.

b) Programul elaborat permite și determinarea consumului de con bustibil la deplasarea în cicluri cu faze cu accelerații constante. De as menea, se tratează posibilitatea realizării regimului de mișcare impus i cadrul ciclului. În cazul cînd regimul menționat nu se poate realiz programul asigură calculul consumului de combustibil la regimul cu accelerație variabilă.

c) Metodele propuse au fost testate în cadrul programului FORTRA care a fost rulat în foarte bune condiții pe un calculator FELIX C-25

d) Metoda și programul elaborate oferă posibilitatea unui studi rapid al influenței diverșilor factori constructivi și ai regimului de mișcar asupra consumului de combustibil al autovehiculelor cu transmisie hidr mecanică. permițînd și efectuarea unor studii de optimizare.

BIBLIOGRAFIE

1. *B. P. Demidovici, I. A. Maron*, Osnovi vicislitelnoi matematiki, Izd-vo Nauka, Mosk 1966.
2. *W. S. Dorn, D. D. Mc Cracken*, Metode numerice cu programe în FORTRAN IV (trad cerea din limba engleză), Editura tehnică, București 1976.
3. *Iu K. Esenovski-Laşkov* ş.a., Avtomobilnaia promîşlenost, XLVI, nr. 6, 1980, pp. 10—1
4. *G. E. Forsythe, Cl. B. Moler*, Computer methods for mathematical computations, Prentic Hall, Inc. Englewood Clifs N.J. 07632, 1977.
5. *B. B. Ghenbom* ş.a., Avtomobilnaia promîşlennost, XXXIV, nr. 6, 1968, pp. 20—23.
6. *E., Hartwich*, ATZ, 74, nr. 8, 1972, pp. 315—323.
7. *Iu. N. Laptev*, Avtotraktormiie ghidrotransformatori, Moskva, Maşinostroenie 197
8. *M. I. Lurie, A. A. Tokarev*, Skorostniie kacestva i toplivnaia ekonomicinost avtomobile Izd-vo Maşinostroenie, Moskva, 1967.

9. *N. D. Mazalov, S. M. Trusov*, Ghidromehaniceskie korobki peredaci, Moskva, Maşinostroenie 1971.
10. *A. N. Narbut*, Ghidrotransformatorì, Maşinostroenie, Moskva, 1966.
11. *A. Numazawa, et al.*, (1980) Int. J. of Vehicle Design, vol. 1, no. 2, pp. 151—164.
12. *G. Paulin, E. Gripentrag*, Numerische Verfaren der Programmiertechnik, VEB Verlag Technik, Berlin, 1975.
13. *L. A. Rumeanţev*, Avtomobilnaia promişlennost, nr. 8, 1981, pp. 20—22.
14. *D. Schürmann, G. W Schweimer*, ATZ, 83, nr. 4, 1981, pp. 177—180.
15. *A. P. Stoicescu*, Dinamica autovehiculelor, vol. I, Litografia Institutului politehnic Bucureşti, 1980.
16. *A. P. Stoicescu*, Dinamica auvtovehiculelor, vol. II, Litografia Institutului politehnic Bucureşti, 1982.
17. *A. P. Stoicescu*, Studii şi Cercetări de Mecanică Aplicată, Tom. 43, nr. 4, 1984, pp. 379—391

Contribution to the Algorithm and FORTRAN-Program for Prediction of the Fuel Consumption of the Motor Vehicle with Hydromechanical Transmission

A new numerical method has been developed for the purpose of the calculation and prediction of the fuel consumption of the motor vehicle with the hydromechanical transmission (torque converter and mechanical gear box), tacking into account both steady state velocity and the variable state velocity of the vehicle, inclusively the cycle run. In the paper is described the features of the FORTRAN — Program written by the author by using this numerical method.

C.Z. :656.225.519.688

INFLUENȚA NEUNIFORMITĂȚII TRANSPORTURILOR ASUPRA NUMĂRULUI DE MIJLOACE DE TRACȚIUNE (LOCOMOTIVE) ÎNTR-UN SISTEM FEROVIAR CUNOSCUT

I. CRISTEA *

În acest articol se recomandă un sistem de calcul care poate fi utilizat cu succes în planificarea transportului de mărfuri.

Sistemul de calcul prezentat asigură o planificare corespunzătoare, care ține seama de o serie de fenomene, în general cunoscute, care apar în activitatea de planificare optimă a transportului de mărfuri.

Pentru transportul mărfurilor în vagoane, remorci etc., se utilizează ca mijloace de tracțiune locomotive de diferite tipuri, autotractoare, etc. În transporturile feroviare, practic toate transporturile de mărfuri se efectuează cu ajutorul mijloacelor de tracțiune numite — în toată lumea — locomotive. Planificarea complexă a tuturor categoriilor de mărfuri pentru a fi transportate necesită în prealabil luarea în considerare a influenței variației volumelor prezentate la transport asupra necesarului de mijloace de transport într-o perioadă de timp determinată. La calcularea necesarului de mijloace de tracțiune (locomotive) într-un sistem feroviar cunoscut, se recomandă următorul model matematic, în care se consideră că toate trenurile de marfă care se formează, utilizează în întregime lungimea liniilor de primire și de expediere din gările rețelei respective, lungime care poate fi aceeași în diferitele puncte ale sistemului.

Pentru determinarea numărului de trenuri care circulă în medie, pe tronsonul de cale ferată (i.j.) în luna de plan K se recomandă formula (1):

$$N_{ijk} = \frac{1000}{\theta_k}\left(\sum_p \sum_q \frac{\frac{1}{h_{qp}} \cdot t_{ijkqp}}{l^s_{(ij)}} + \sum_q \frac{l_q \cdot \mathscr{E}_{ijkp}}{l^s_{(ij)}} \right) \text{trenuri/zi} \qquad (1)$$

unde :

t_{ijkqp} — curentul din marfa p încărcată în vagoane de tipul q pe traseul $(i \cdot j.)$ în luna de plan K, mii tone.

h_{qp} — norma de încărcare a tipului de vagon q cu marfa de tip p · în tone.

l_q — lungima vagonului de tip q în metri.

---

* Ing., coordonator al transportului public, București.

$l_{(ij)}$ — lungimea liniilor de primire-expediere pe tronsonul ($i.j.$) în metri.

$\mathscr{E}_{ijkq}$ — curentul de vagoane goale de tipul q pe tronsonul ($i.j.$), în luna de plan K, în mii vagoane.

θ_k — durata de timp din luna de plan K, în zile.

Pentru calculul mărimii parcului mjloacelor de tracțiune de locomotive necesar zilnic în „capul" trenurilor pe tronsonul ($i.j.$) în luna de plan K se recomandă utilizarea formulei (2) :

$$P^{cap}_{(ij)k} = L_{(ij)} \cdot (N_{ijk} + N_{jik}) \tag{2}$$

unde :

$L(i.j.)$ — este lungimea tronsonului de cale ferată ($i.j.$) în metri.

Totodată, dacă coeficientul parcursului suplimentar $\alpha^{B}_{(ij)}$ timpul mediu zilnic cît se află mijlocul de tracțiune (locomotive) pe tronsonul $\tau^{yy}_{(ij)}$; viteza medie lunară pe același tronson $v^{yy}_{(ij)k}$, se consideră pentru fiecare tronson din rețea ca fiind constante și că acestea nu depind de volumul de transport, atunci parcul de lucru de locomotive necesar pentru realizarea transporturilor posibile pe tronsonul ($i.j.$) se poate calula cu cu formula (3) :

$$P^{lucru}_{(ij)k} = \frac{(1 + \alpha^{B}_{(ij)})}{\tau_{(ij)} \cdot v^{yy}_{(ij)k}} \cdot P^{cap}_{(ij)k} \quad \text{(bucăți)} \tag{3}$$

Pentru simplificarea și totodată pentru a da un caracter mai expresiv relațiilor de interdependență dintre elementele tehnico-economice ale rețelei feroviare considerate, vom face notațiile (4) și (5) pe care le combinăm cu formulele 1 și 3, iar formula (2) devine ca urmare formula (6) :

$$\lambda_{ijkqp} = \frac{1000\,(1 + \alpha^{B}_{(ij)})}{\tau_{(ij)} \cdot v^{yy}_{(ij)k}\theta_k} \cdot \frac{l_q}{l^{s}_{(ij)} \cdot h_{qp}} \tag{4}$$

$$\lambda^{\circ}_{ijkq} = \frac{1000\,(1 + \alpha^{B}_{ij})}{\tau_{ij} \cdot v^{yy}_{(ij)k}\theta_k} \cdot \frac{l_q}{l^{s}_{(ij)}} \tag{5}$$

$$P^{lucru}_{(ij)k} = \sum_{p}\sum_{q} \lambda_{ijkqp} \cdot t_{ijkqp} + \sum_{q} \lambda^{\circ}_{ijkq} \cdot \mathscr{E}_{ijkq} +$$

$$+ \sum_{p}\sum_{q} \lambda_{jikqp} \cdot t_{jikqp} + \sum_{q} \lambda^{\circ}_{jikq} \cdot E_{jikq} \quad \text{(bucăți)} \tag{6}$$

Formula (6) arată dependența mărimii parcului de lucru de locomotive ocupate pe tronsonul respectiv din rețeaua considerată mărime care este în funcție atît de curentul de mărfuri ce trebuie transportate în în perioada planificată, cît și de curentul de vagoane goale în ambele sensuri.

Ținînd seama că o dislocare este posibilă pe toată rețeaua de cale ferată considerată, pe distanțe care nu depășesc parcursul locomotivelor

pe timp de 1 sau 2 zile și că pentru această dislocare este posibil să nu se ia în considerare cheltuielile legate de parcursul locomotivelor în cazul dislocării și făcînd notația (7), vom obține formula de calcul (8) al parcului de locomotive de tipul ε în luna de plan K pe întreaga rețea feroviară la care ne referim :

Ψ — mulțimea tronsoanelor din întreaga rețea feroviară considerată ca avînd variații mari în transporturile sezoniere. (7)

$$P_{k\varepsilon}^{\text{lucru}} = \sum_{(ij)\in\Psi_\varepsilon} \left(\sum_p \sum_q \lambda_{ijkqp} \cdot t_{ijkqp} + \sum_q \lambda^{\circ}_{ijkq} \cdot \mathcal{E}_{ijkq} \right) \quad \text{(bucăți)} \qquad (8)$$

În condiții obișnuite de realizare a tuturor indicatorilor planificați, scoaterea unei locomotive de lucru din activitate de pe tronsonul considerat, de regulă nu se practică. Dar, în condițiile unor neuniformități sezoniere de transport — pe diferite secțiuni ale rețelei — produse mai ales ca urmare a unor fenomene climatice sau de altă natură, care se caracterizează printr-o perioadă mai lungă decît cea luată în calcul, este posibilă dislocarea unei părți din parcul de locomotive de același tip de pe un tronson pe altul, astfel încît transporturile necesare să poată fi efectuate într-un timp util și eficient.

The Influence of Carriage Ununiformity on the Number of Locomotives in a Known Railway System

In this paper is presented un algorithm which may be utilized succesfully carriage planning.

The algorithm assures an adequate planning which takes into account some phenomena, generally known, which appear in the activity of carriage optimal planning.

C.Z. :338 :656.2
519.233.5

UN MODEL MATEMATIC APLICAT ÎN PROGNOZA TRANSPORTURILOR

D. REBUȘAPCĂ, C. TÂRCOLEA *

În lucrare se elaborează un model matematic bazat pe metoda corelației multiple, pe baza căreia folosind indicii de creștere a producției industriale, agricole și construcții și montaj în perspectivă, s-a determinat creșterea volumului de transport în anul 1985, față de 1980 pe căile ferate, auto, fluviale maritime și prin conducte. Metodologia elaborată poate fi utilizată ca mijloc suplimentar de testare a prognozelor privind dezvoltarea transporturilor.

1. Corelația producția socială-transporturi și factorii care o influențează

Între producția socială și transporturi există o corelație obiectivă ce exprimă raportul de cauzalitate în care se găsesc acestea în procesul de ansamblu al reproducției socialiste.

Această corelație trebuie privită atît sub aspect *cantitativ*, al raportului dintre volumul producției și cel al transporturilor cît și sub aspect *calitativ*, respectiv al modificărilor din structura producției sociale, care determină și pe cea a transporturilor.

Corelația dintre producție și transporturi nu este imuabilă ea are un caracter dinamic și complex, fiind influențată de o multitudine de factori, împrejurări istorice, etapa de dezvoltare a societății, nivelul economiei și gradul ei de complexitate.

În relația dintre aceste două sfere de activitate determinantă este producția socială, a cărei creștere sau scădere are repercusiuni directe asupra volumului de transport. Deoarece transportul de mărfuri este o continuare a procesului de producție, dezvoltarea lui trebuie corelată cu volumul producției din toate ramurile economiei naționale, respectiv al industriei, agriculturii, construcții și montaj ș.a.

Corelația dintre producție și transporturi este influențată de o serie de factori cum sînt : *repartizarea teritorială* a forțelor de producție prin care asigurîndu-se apropierea producției de sursele de materii prime și bazele de consum, duce la reducerea necesităților de transport.

Un alt factor reprezintă *concentrarea producției în unități mari* (*centrale*) *sau grupuri integrate* (*combinate*), care determină o creștere a producției fără o sporire a transporturilor.

Asupra corelației producție-transport acționează și alți factori care determină în anumite perioade o sporire mai accentuată a volumului de

* Prof. dr., catedra de Economie politică ; Lect. dr., catedra de Matematici I.

transport în raport cu producţia. Astfel, *importul de mărfuri şi tranzitul*, a căror acţiune se intensifică dacă ţinem seama de faptul că ţara noastră participă într-o măsură tot mai largă la circuitul economic mondial, adîncirea diviziunii sociale a muncii, care sporind gradul de *specializare* şi *cooperare*, determină ca produsele să fie reexpediate de mai multe ori.

Acţiunea contradictorie a acestor factori determină ca în anumite perioade, transporturile să crească mai repede sau mai încet decît producţia. Deci, corelaţia producţie-transporturi este complexă şi multilaterală; o deosebită importanţă prezintă cunoaşterea acesteia şi elaborarea unui model matematic care să fie utilizat în prognoza transporturilor.

2. Aplicarea metodei corelaţiei multiple

În cazul problemei puse, variabila Y = volumul de transport, este dependentă de mai mulţi factori.

Această dependenţă poate fi exprimată sub forma:

$$Y = e^{x_1} \cdot I^{x_2} \cdot A^{x_3} C^{x_4} \qquad [1]$$

unde

e = constanta = 2,30258
I = producţia globală industrială
A = producţia globală agricolă
C = producţia din construcţii-montaj
x_1 = parametru de uniformizare a valorilor statistice
x_2, x_3, x_4 = parametri

Dacă logaritmăm expresia [1] obţinem:

$$\log y = x_1^* + x_2 \log I + x_3 \log A + x_4 \log C \qquad [2]$$

Necunoscutele problemei sînt $x_1^* = x_1 \log e$, x_2, x_3, x_4 şi le vom determina astfel încît

$$\Sigma(x_1^* + x_2 \log I + x_3 \log A + x_4 \log C - \log y)^2 = \text{minim} \qquad [3]$$

În urma calculului efectuat a rezultat sistemul:

$$\begin{aligned}
n x_1^* + x_2 \Sigma \log I + x_3 \Sigma \log A + x_4 \Sigma \log C &= \Sigma \log y \\
x_1^* \Sigma \log I + x_2 \Sigma (\log I)^2 + x_3 \Sigma \log A \log I + & \\
x_4 \Sigma \log C \log I &= \Sigma \log y \log I \\
x_1^* \Sigma \log A + x_2 \Sigma \log I \log A + x_3 \Sigma (\log A)^2 + & \\
x_4 \Sigma \log C \log A &= \Sigma \log y \log A \\
x_1^* \Sigma \log C + x_2 \Sigma \log I \log C + x_3 \Sigma \log A \log C + & \\
+ x_4 \Sigma (\log C)^2 &= \Sigma \log y \log C
\end{aligned} \qquad [4]$$

În final ,funcţia analizată capătă următoarea formă :

$$\log Y_{I.A.C.} = \frac{-x_1}{2{,}30268} + x_2 \cdot \log I + x_3 \cdot \log A + x_4 \cdot \log C$$

În acest fel se determină funcţia Y care are o semnificaţie deosebită, deoarece ea exprimă esenţa metodologiei preconizate. În condiţiile în care se cunosc indicatorii de creştere a producţiei industriale, agricole, construcţii şi montaj pentru perioada viitoare, înlocuindu-i în funcţia determinată se poate obţine sporirea corespunzătoare a volumului de transport.

3. Determinarea volumului total de transport (tone) pentru anul 1985/1980

În determinarea volumului de transport total (în tone) s-a pornit de la sarcinile stabilite de Congresul al XII-lea al P.C.R., privind dezvoltarea economico-socială a României în perioada 1981—1985.

Ţinînd seama de creşterile producţiei industriale, agricole, de construcţii-montaj, prevăzute pentru anul 1985 faţă de 1980, s-a determinat următorul volum total de transport :

Varianta I $\log Y_{I.A.C.} = -0{,}276 + 0{,}006 \cdot 2{,}190 + 0{,}143 \cdot$

$\cdot 2{,}089 + 0{,}987 \cdot 2{,}133 = 2{,}140$

Varianta II $\log Y_{I.A.C.} = -0{,}276 + 0{,}006 \cdot 2{,}204 + 0{,}143 \cdot$

$\cdot 2{,}096 + 0{,}987 \cdot 2{,}149 = 2{,}157$

$$Y_{1985} = 138{,}04\ \% - 143{,}54\ \%$$

4. Determinarea volumului de transport pe căile ferate în 1985/1980

Evoluţia volumului de transport pe cale ferată s-a determinat calculînd parametrii x_1, x_2, x_3, x_4, care arată contribuţia celor trei factori $I.$, $A.$, $C.$, la această creştere, prin rezolvarea unui sistem de tipul [4] şi anume :

$$12 \cdot 0{,}434\, x_1 + 27{,}285\, x_2 + 25{,}289\, x_3 + 26{,}673\, x_4 = 26{,}137$$

$$(0{,}434)27{,}285 x_1 + 62{,}704 x_2 + 57{,}632 x_3 + 60{,}894 x_4 = 59{,}632$$

$$(0{,}434)25{,}289 x_1 + 57{,}632 x_2 + 53{,}347 x_3 + 56{,}299 x_4 = 55{,}153$$

$$(0{,}434)26{,}673 x_1 + 60{,}894 x_2 + 56{,}299 x_3 + 59{,}459 x_4 = 58{,}235$$

Soluţia sistemului este : $x_1 = 7{,}970$; $x_2 = 0{,}144$; $x_3 = 1{,}649$; $x_4 = 0{,}822$

Înlocuind parametrii obţinuţi şi valorile I, A, C, s-a calculat creşterea volumului de transport în 1985 faţă de 1980, care este :

$$Y_{1985} = 138{,}35\ \%.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGY... 1848 KÖNYVTÁRA

5. Determinarea volumului de transport auto în 1985/1980

În cazul transportului auto, parametrii x_1, x_2, x_3, x_4, care arată contribuţia celor trei factori *I.A.C.* la această dezvoltare, se vor determina din sistemul:

$$12 \cdot 0{,}434x_1 + 27{,}285x_2 + 25{,}289x_3 + 26{,}673x_4 = 27{,}314$$

$$0{,}434 \cdot 27{,}285x_1 = 62{,}704x_2 + 57{,}632x_3 + 60{,}894x_4 = 62{,}411$$

$$0{,}434 \cdot 25{,}289x_1 + 57{,}632x_2 + 53{,}347x_3 + 56{,}299x_4 = 57{,}673$$

$$0{,}434 \cdot 26{,}673x_1 + 60{,}894x_2 + 56{,}299x_3 + 59{,}459x_4 = 60{,}924$$

cu soluţia $x_1 = -8{,}234$; $x_2 = 0{,}243$; $x_3 = 1{,}601$; $x_4 = 0{,}862$.

După înlocuire, ca şi în cazurile anterioare, s-a determinat creşterea volumului de transport auto în 1985 faţă de 1980, care a fost de:

$$Y_{1985} = 138{,}36\,\% - 147{,}57\,\%.$$

6. Determinarea volumului de transport fluvial 1985/1980

Parametrii x_1, x_2, x_3, x_4, se vor determina din sistemul:

$$12 \cdot 0{,}434x_1 + 27{,}285x_2 + 25{,}289x_3 + 26{,}673x_4 = 26{,}147$$

$$0{,}434 \cdot 27{,}285x_1 + 62{,}704x_2 + 57{,}632x_3 + 60{,}894x_4 = 59{,}679$$

$$0{,}434 \cdot 25{,}289x_1 + 57{,}632x_2 + 53{,}347x_3 + 56{,}299x_4 = 55{,}192$$

$$0{,}434 \cdot 26{,}673x_1 + 60{,}894x_2 + 56{,}299x_3 + 59{,}459x_4 = 58{,}267$$

cu soluţia $x_1 = 8{,}031$; $x_2 = 0{,}170$; $x_3 = 1{,}652$; $x_4 = 0{,}805$.

Rezultă $Y_{1985} = 116{,}14 - 120{,}23\,\%$.

7. Determinarea volumului de transport maritim în 1985/1980

Parametrii x_1, x_2, x_3, x_4, se vor determina din sistemul:

$$12 \cdot 0{,}434x_1 + 27{,}285x_2 + 25{,}289x_3 + 26{,}673x_4 = 26{,}661$$

$$0{,}434 \cdot 27{,}285x_1 + 62{,}704x_2 + 57{,}632x_3 + 60{,}894x_4 = 66{,}663$$

$$0{,}434 \cdot 25{,}289x_1 + 57{,}632x_2 + 53{,}347x_3 + 56{,}299x_4 = 61{,}568$$

$$0{,}434 \cdot 26{,}673x_1 + 60{,}894x_2 + 56{,}299x_3 + 59{,}549x_4 = 65{,}073$$

cu soluţia $x_1 = -7{,}972$; $x_2 = 0{,}699$; $x_3 = 1{,}108$; $x_4 = 1{,}043$

Rezultă: $Y_{1985} = 406{,}44\,\% = 440{,}55\,\%$

8. Determinarea volumului de transport prin conducte în 1985/1980

În cazul transportului prin conducte, parametrii x_1, x_2, x_3, x_4 se vor determina din sistemul:

$$12 \cdot 0{,}434x_1 + 27{,}285\,x_2 + 25{,}289x_3 + 26{,}673x_4 + 26{,}673x_4 = 26{,}031$$

$$0{,}434 \cdot 27{,}285x_1 + 62{,}704x_2 + 57{,}632x_3 + 60{,}894x_4 = 59{,}409$$

$$0{,}434 \cdot 25{,}289x_1 + 57{,}632x_2 + 53{,}347x_3 + 56{,}299x_4 = 54{,}936$$

$$0{,}434 \cdot 26{,}673x_1 + 60{,}894x_2 + 56{,}299x_3 + 59{,}459x_4 = 58{,}011$$

cu soluţia: $x_1 = -8{,}067$; $x_2 = 0{,}161$; $x_3 = 1{,}640$; $x_4 = 0{,}828$.

Rezultă: $Y_{1985} = 110{,}15\,\% - 117{,}22\,\%$

Sintetizînd calculele efectuate reiese următoarea evoluţie a volumului total de transport în anul 1985 faţă de 1980:

Tabelul 1

Dinamica transportului de mărfuri în anii *1985/1980*

(tone) (%)

	Ritm mediu anual de creştere: 1981—1985	
TOTAL	138—143,5	6,7—7,5
Transport feroviar	138,4	6,7
Transport auto	138,4—147,6	6,7—8,0
Transport fluvial	116,1—120,2	3,1—3,8
Transport maritim	406,4—440,6	32,4—34,5
Transport prin conducte petroliere magistrale	110,2—117,2	2,0—3,2

Din datele rezultate din calcul, reiese că volumul de transport stabilit pe baza modelului matematic elaborat, îndeosebi pe calea ferată, corespunde cu nivelele orientative stabilite de CSP în diverse etape de elaborare a planului cincinal 1981—1985, pentru celelalte forme, însă diferenţele sînt sensibile.

În funcţia utilizată s-a determinat influenţa variabilelor independente ca producţia industrială, agricolă, construcţii şi montaj, asupra volumului de transport. Ori, se cunoaşte că volumul de transport este în funcţie nu numai de producţia socială, ci şi de o multitudine de alţi factori care nu au putut fi luaţi în calcul, şi de aici apare necesitatea ajustării rezultatelor obţinute, urmînd ca investigaţiile în acest sens să fie continuate.

În concluzie, considerăm că metodologia elaborată poate fi utilizată ca mijloc suplimentar de testare a prognozelor şi studiilor previzionale elaborate pe baza metodelor empirice utilizate, pînă în prezent, privind dezvoltarea transporturilor din ţara noastră.

BIBLIOGRAFIE

1. *D. Rebuşapcă*, Viaţa economică nr. 22 din 31 mai 1968.
2. *C. Moineagu*, Modelarea corelaţiilor în economie. Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1974.

A Mathematical Model Applied to Transport Prognosis

This paper presents the method of multiple correlation on the basis of which, using the prospective growth indices of the industrial and agricultural production and of the construction and assembly work, we have determined the volume growth of railway, motor car, sea and pipe transport in 1985 as againt 1980.

The methodology worked out can be used as an additional means of testing the prognosis for transport development.

C.Z. 621.43.044
621.835

THE CHARACTERISTICS OF A CAM PROFILE FOR THE BALLISTIC MOTION OF THE INLET VALVE IN A SPARK IGNITION ENGINE, RELATED TO INCREASING THE FUEL ECONOMY AND DECREASING THE EXHAUST EMISSIONS

M. OPREAN *

The paper presents certain design characteristics of the cam profile of a valve gear with ballistic motion of the inlet valve, designed to allow the fulfilment of a new principle of combustion of weak mixtures at reduced engine loads and speeds, that is the principle of amplification of the turbulence generated within the intake process with the purpose of combustion intensification.

Several versions have been theoretically investigated through computer numerical simulation of the thermal cycle of the spark ignition engine and of the valve gear, and then experimentally tested.

The solution proposed results in a cycle performance, with high economy and low emissions, superior to the reference engine, at least for the mentioned operating conditions.

1. Introduction

The study of the experimental data mentioned in [9], based on the testing of a large number of engines, operating at optimal tuning conditions, shows that the reduction of the specific fuel consumption in a spark ignition engine is proportional to the rise of the air fuel ratio.

Extended research work has been carried out in the last decade in order to create spark ignition engines capable to reach high efficiency, while running on weak mixtures. All the solutions developed are based on the stratification of the mixture in the cylinder and the technical solution is the division of the combustion chambers.

As car engines operate most frequently at low load ratings and speeds, the application of a different principle is suggested, which would make the combustion of weak mixtures possible, while efficient, namely the principle of amplified turbulence. It is estimated that by increasing the

* Lecturer Ph. D., Motor Vehicles Dept.

turbulent motion in the cylinder, a better homogenity and uniformity of the fuel-air mixture, and faster ignition and flame front travel rates become possible.

The main source of turbulence in the cylinder is the velocity W_{sa} of the fresh fluid through the inlet valve opening. Tests proved that the flame front spread rate is proportional to W_{sa}; therefore, it is expected that its increase above the values reached by an existing standard engine will contribute to the amplification of combustion intensity and ignition repeatibility. It is also expected that the flame extinction in the gas mass, which takes place at low loads and high inlet manifold depressions, could be reduced in intensity or even eliminated.

The methods known at the present time for the increase of the velocity W_{sa} through the inlet valve opening for low load ratings and speeds, either remain at laboratory test levels, or are applied to series engines, but in this case they are objectionable due to their complexity.

The testing of a very simple procedure is suggested, which should allow the increase of the velocity through the inlet valve opening (the turbulence amplification in the cylinder) at low speeds and implicitly at low loads by reducing the angle-section. At high speeds, the angle-section extends and reaches a maximum value at nominal ratings, when a volumetric efficiency, at least identical to that of the standard engine, is to be attained. To this purpose, a technical solution proposed in the '70s [8] has been materialized into an original design.

The ballistic motion valve proposed, is subordinated to the present day requirements, namely to increase the turbulence at low speeds and loads, by imposing an appropriate engine operating behaviour.

At speeds less than the maximum torque speed ($n < n_M$), the valve motion is controlled by the cam throughout the entire inlet period. The cam has, however, a profile whose maximum lift is less than the maximum lift of the standard cam. The area of the instantaneous section of the inlet valve and the angle-section are thus lowered.

At speeds higher than the maximum torque speed ($n > n_M$), at a certain point, the valve is released in a ballistic motion (free motion) and the angle-section starts to increase with the speed. At nominal speed, the angle-section should be at least equal to that of the standard engine.

For all speeds lower than the nominal speed, the velocity through the inlet valve opening is higher in the case of the valve performing a ballistic motion, with a smaller angle-section, than in the case of a valve controlled by the standard cam.

2. The Cam Profile

There are several types of cam profiles used for car engines, i.e. : the harmonic cam profile, the parabolic cam profile, the polydin cam profile and the Kurz cam profile [1], [3], [4]. The harmonic and parabolic cams provide limited opportunities to change the lift, speed and acceleration of the tappet, whereas the polydin cam profile is satisfactory only for a restricted speed range.

The investigation of the Kurz cam profile led to the conclusion that this type of cam provides varied and multiple opportunities to describe the ballistic motion performed by the valve, with limited acceleration and suitable releasing speeds in view of reaching the angle-section needed at the nominal speed.

Experimental tests carried out by same carmakers (Ford, Wauxhall, Fiat and Triumph) outlined the fact that in the high-speed car engines it would be desirable that the maximum valve lift should occur at about 85—105 deg.a.t.d.c. [2], [7], [10]. It is therefore necessary to use an asymmetrical cam profile. This conclusion is advantageous for the case of the valve gear with ballistic motion of the inlet valve, as the mentioned condition leads to higher lifting speeds of the tappet, facilitating the ballistic release of the valve. However, it is worth mentioning that this solution leads to very high acceleration values in the lifting phase and therefore it is necessary to limit its maximum value.

3. Influence of Certain Design Parameters upon the Valve Motion

Certain possibilities of control over the ballistic motion of the inlet valve are presented by means of some design parameters describing the ascending and descending flanks of the cam profile.

This research has also intended to optimize a number of design factors, imposing conditions of limitation of the maximum acceleration and of certain characteristic valve speeds, in order to reduce friction and shock wear, and to obtain the angle-section, necessary to achieve at nominal ratings the same volumetric efficiency as the engine with the standard valve gear; of positioning, in the inlet stroke, of the instant of reaching the maximum valve lift; in agreement with the operational requirements of development of the rated power, and the power margin for car acceleration.

3.1. *Angular Range of the Clearance Take up Ramp*

The design characteristics of the valve gear mechanism with ballistic movement of the valve impose additional restrictions concerning the speed at the end of the clearance take up interval, compared to that recommended for series car engines (max. 0.02 mm/rad) [5]. Thus, the reduced tensioning of the elements (by approx. 60 per cent) compared to the reference system results in a shock generated by their contact which determines uncontrolled movements of the valve in the stage previous to launching.

The reduction of the shock velocity can be achieved either by increasing the angular clearance take up interval, Φ_0, or by reducing the height of this ramp, h_0. Thus, when doubling the length of this interval the shock velocity has been reduced by 50%, and when halving the heigth, h_0, the reduction has been of 40%. It is mentioned that in both cases an additional stress upon the system has been recorded as a consequence of a maximum acceleration increase by 12.2%, and 10%, respectively.

3.2. *Angular Range of the Positive Acceleration*

The need to achieve the angle-section necessary to the limit rating, under the circumstances of maximum height decrease of the cam profile — in order to increase the velocity of the fresh fluid through the valve opening at reduced speeds and loads — as well as the fulfilment of the conditions of valve launching at high engine speeds imposed the research of the cam profile with durations of the angular range Φ_1 smaller than those prescribed for the standard cam ($\Phi_1/T > 1.3$, where T is the characteristic period of the oscillations of the valve gear).

Initially, profiles with angular ranges of 3,4 and 5 deg.cam angle have been investigated, but the extremely high level of maximum acceleration (more than 10,000 m/s²) imposed the research of other profiles with ranges Φ_1 accordingly increased [6].

The values of the maximum acceleration and its percentage variation for different values of Φ_1 are presented in Figure 1.

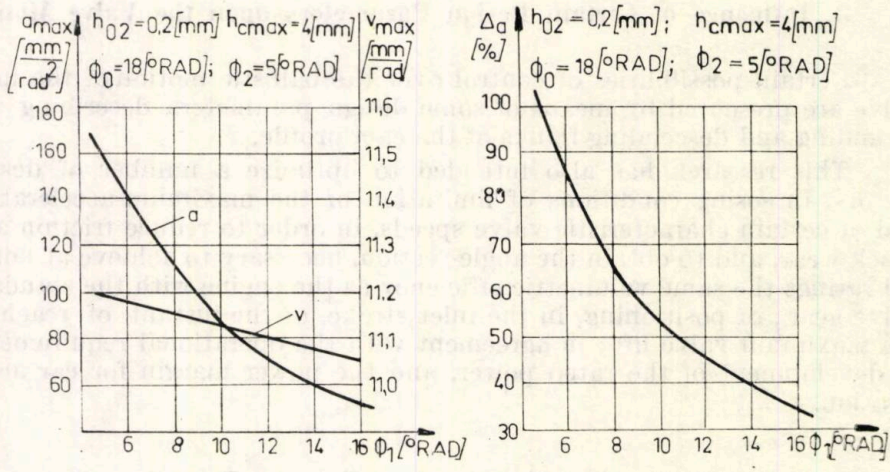


Fig. 1 — Dependence of the tappet maximum speed and acceleration reduced to the valve axis, on the size of the angular range Φ_1

The cam profile with the angular range Φ_1 of 16 deg.cam angle leads to the achievement of certain maximum accelerations (53 mm/rad²) comparable to that of the standard mechanism (41 mm/rad²).

Imposing the condition that the stress on the system under the action of the inertia force is not greater than for the standard version, the angular range Φ_1 has been increased in order to reduce the value of the maximum acceleration below the level of 41 [mm/rad²]. The research results are presented in Figure 2.

With the increase of Φ_1 from the value of 15 deg.cam angle up to 20 deg.cam angle the maximum launch speed is not diminished by more than 1 %, maitaining itself to high values, while the maximum acceleration is reduced by 25 %, reaching values of up to 19 % lower than for the version of the reference engine.

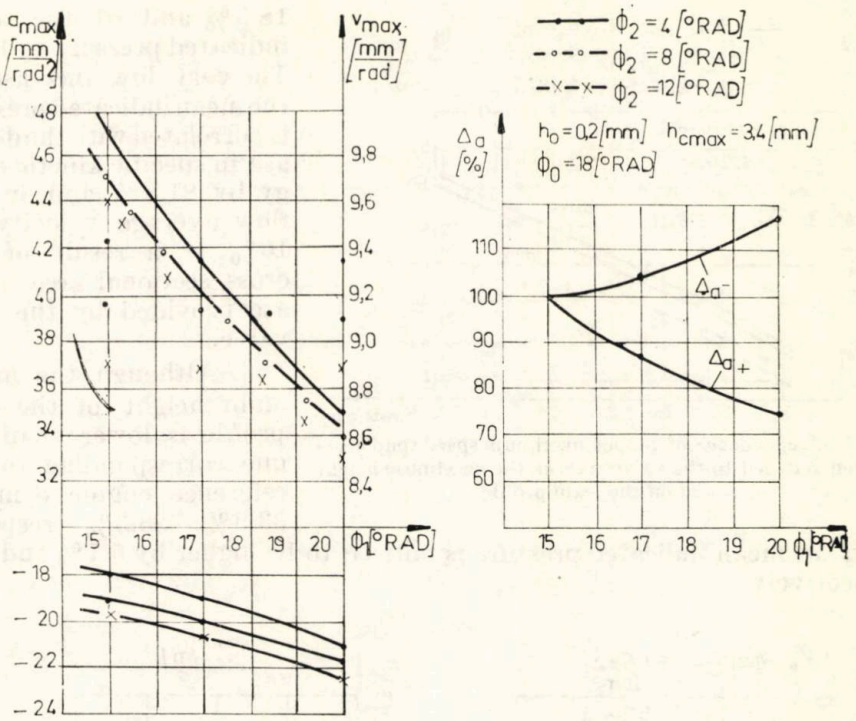


Fig. 2 — Dependence of maximum acceleration and speed on the size of the angular ranges Φ_1 and Φ_2

When selecting the size of the angular range Φ_1 one has to take into consideration its decissive influence on the moment of valve launching [6].

3.3. *Maximum Height of the Cam Profile*, h_{cmax}

Cam profiles with maximum heights between 3.4—4.0 mm (the maximum height of the reference cam profile has been 5.15 mm) have been studied.

For a given maximum height of the cam profile the achievement of a high lauching speed has been aimed at, limiting the maximum acceleration to the corresponding value of the reference engine. Figure 3 presents the type of variation of the maximum speed and acceleration of the tappet reduced to the valve axis, for different values of the maximum height and various cam profiles.

The cam profile with the maximum height of 4 mm imparts to the valve the same maximum speed as in the case of the reference engine, but with a maximum acceleration greater by approx. 17%, and that with the height of 3.6 mm a maximum speed smaller by 10%.

The influence of the maximum height of the cam profile on certain efficiency factors of the thermal cycle is presented in Figure 4.

The increase in the maximum height of the cam profile by 17.6% (from 3.4 mm to 4 mm) determines the increase of the angle section by

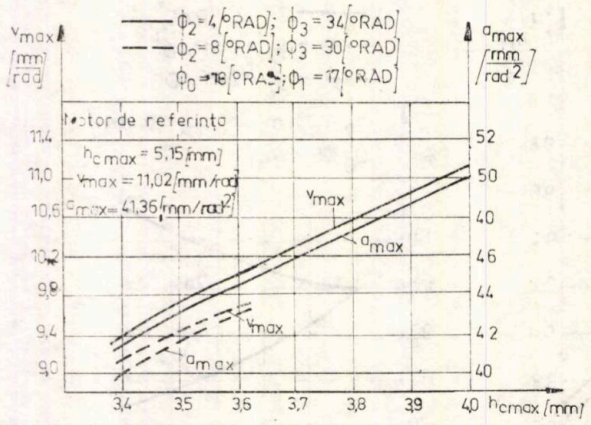


Fig. 3— Dependence of tappet maximum speed spnd acceleration reduced to the valve axis on the maximum height and on the cam profile

18.5% and of the mean indicated pressure by 18%. The very low increase of the mean indicated pressure is correlated with the decrease in specific kinetic energy by 21.8% and in the flow average velocity by 10%, as a result of the cross sectional area increase provided by the inlet valve.

Although the maximum height of the cam profile is lower than the one corresponding to the reference engine cam by 33.9%, 23.3% respectively, the mean indicated pressure is noticed to be higher by 5.7% and 8% respectively.

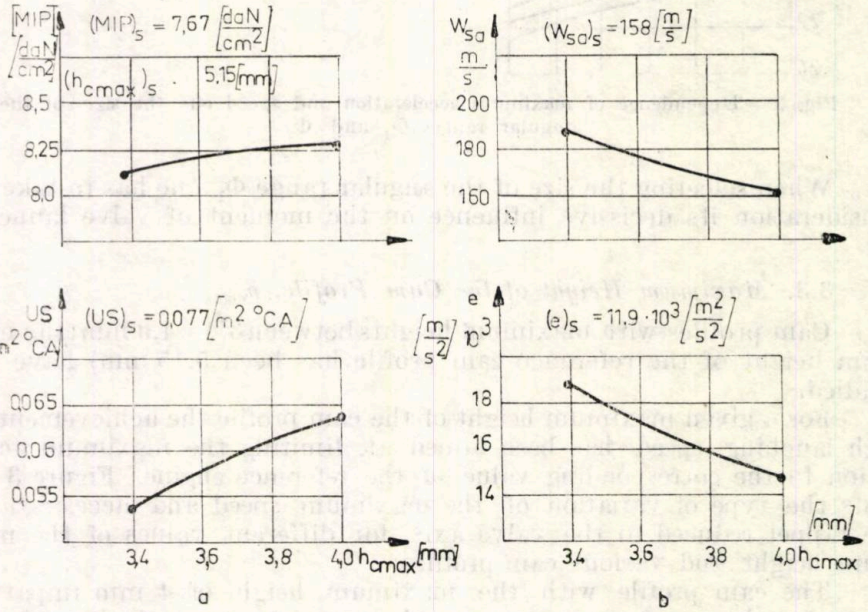


Fig. 4 — Dependence of efficiency factors on the maximum height of the cam profile ($n = 3500$ rpm $\varkappa = 40\%$): a — mean indicated pressure (MIP) and the angle-section (US); b — mean velocity (W) and specific kinetic energy of the fresh fluid (e). The suffix s represents the efficiency factors for the standard

The analysis of experimental results emphasizes the fact that the engine with valve gear with ballistic motion of the inlet valve reaches a

better cylinder filling than the standard engine and burns weaker mixtures with a higher air fuel ratio by up to 15%. If the specific fuel consumption curves are analysed, they are found to be practically lower at any operating conditions [6]. Also, the maximum pressure in the cylinder is reached at the same time or earlier than in the standard engine, and its values are very similar. The above-mentioned conclusions show that, by enhancing the turbulence, the combustion speed is increased and burning in the power stroke limited.

As regards the polluting substances concentration in the exhaust gases, a reduction was noticed in the carbon oxide by 50% (an effect of the better mixture homogenity in the cylinder), in the hydrocarbon concentration by 70 ppm (a more complete combustion) and at the same time an increase of the nitrogen oxides concentration by 10%. This final result, although undesirable also illustrates that combustion is performed with higher speeds.

3.4. *Shock Damping when Closing the Valve*

The shock when closing the valve is caused by its seating speed and it is inevitably due to the clearances in the mechanism.

The valve seating speed depends, for a given elastic constant of the valve spring, on the motion amplitude. Thus, for an amplitude increase by 9.5%, an increase of the seating speed by 10.5% was noticed.

In order to get a reduction of the valve seating speed without using special braking devices, complicating the valve gear, the author suggested an original solution that aims at shifting the final shock from the seat to the cam descending flank, profiled as a "ballistic"-type profile. To this end, a suitable extension of the cam descending flank was made. At the same time, the valve spring sizing was made so that, under nominal operating conditions, the valve, at the end of the free motion, returns in contact with the cam, through the push rod system.

The descending profile shape was determined from the condition of developing a tappet motion law consistent with the ballistic law of valve motion, with a view to decreasing the relative speed between them and also, from the condition of reaching the necessary angle-section.

The Kurz profile was tested and accordingly adapted for the cam descending flank.

The higher angular duration of the cam descending flank leads to maximum tappet speeds and accelerations, reduced to the valve axis, lower than the corresponding values on the ascending flank and to an improvement of the mechanism dynamic behaviour at speeds below the limit conditions.

An interesting effect on the seating speed is obtained by increasing the clearance take up ramp height on the profile descending flank. Thus, when doubling the ramp height (from 0.1 mm to 0.2 mm), the seating speed value is reduced by 17%.

However, although the suggested solution leads to a significant reduction in the relative shock velocity, its high values, at least under

nominal conditions, as well as the possibility of the valve striking on its seat at engine overspeeds, require adoption of some additional solutions for shock attenuation.

4. Characteristic Features of Cam Profile

Following the efficiency analysis for several versions, the cam profile was suggested with the characteristic features shown in Table 1.

Table 1

Characteristic features of cam profile

h_{cmax} [mm]	h_{0a} h_{0d} [mm]	Φ_{0a} Φ_{0d}	Φ_{1a} Φ_{1d} deg. of	Φ_{2a} Φ_{2d} cam rotation	Φ_{3a} Φ_{3d}	$\alpha_{h_{cmex}}$ deg.crank angle
3.6	0.1	36	20	8	27	90
	0.2	26	30	7	40	

a — ascending flank
d — descending flank
$\alpha_{h_{cmax}}$ — angular position of the maximum height of cam profile
h_o — clearance take up ramp height

5. Conclusions

The investigation undertaken led to establishing the constructive characteristics of a cam profile which ensure an inlet valve movement according to a ballistic law.

The suggested solution leads to performances concerning energy saving and pollution higher than the reference engine and to a significant reduction of the dynamic loading of the valve gear, at least for car frequent operating conditions.

REFFRENCES

1. *B. K. Baliuk, A. E. Bojko*, Nadejnost mehanizmov gazoraspredelenia bistrohodnih dizelei, Moskva Masinostroenie, 1979.
2. *Ch. Deutsch*, Ingenieurs de l'automobile, nr. 11, 1976.
3. *B. Grünwald*, Teoria, calculul și construcția motoarelor pentru autovehicule rutiere, București, E.D.P., 1980.
4. *R. Herrmann, I. Delange, G Louradour*, Ingenieurs de l'automobile, nr. 11, 1969.
5. *L. V. Korcemnîi*, Mehanizm gazoraspredelenia dvigatelia, Moskva, Masghiz, 1964.
6. *M. Oprean*, Studiul interacțiunii cama — arc de supapa la motoarele cu aprindere prin scînteie de turație ridicată. Teză de doctorat. Institutul Politehnic București 1984.
7. *M. Oprean*, s.a., Construcția de mașini, nr. 11, 1972.
8. *M. C. Paulmier*, Ingenieurs de l'automobile, nr. 6, 1974.
9. *H. Takumi* s.a. On the development of a lower fuel consumption concept car with high performance. Motor Vehicle Technology Proceedings Vol. 1, nov. 1983, Edited by Society of Automotive Engineers of Japan.
10.* * *, Cylinder Head Design, Automobile Engineer, January 1971.

Profil de camă pentru mişcarea balistică a supapei de admisie la un motor cu aprindere prin scînteie corelat cu eficienţa economică şi cu limitarea emisiunilor nocive

În lucrare se prezintă particularităţile constructive ale profilului de cama al unui mecanism de distribuţie cu mişcare balistică a supapei de admisie conceput să permită realizarea unui principiu nou de ardere a amestecurilor sărace, la regimurile de sarcină şi turaţie reduse, şi anume, principiul amplificării turbulenţei generate în procesul de admisie, în vederea intensificării arderii.

S-au cercetat teoretic mai multe variante, prin simulare pe calculatorul numeric, ale ciclului termic al motorului cu aprindere prin scînteie şi ale mecanismului de distribuţie şi s-au verificat experimental.

Soluţia propusă conduce la performanţe energetice, de economicitate şi de poluare superioare motorului de referinţă, cel puţin la regimurile de funcţionare menţionate.

C.Z. :531.517.9

STUDIUL MIȘCĂRII MECANISMELOR CARDANICE PRIN METODE MATRICEALE

ȘT. STAICU *

Lucrarea determină, sub forma matriceală, ecuațiile de mișcare a unui mecanism cardanic. Se stabilesc, mai întîi, formulelele matriceale pentru distribuțiile de viteze și accelerații în funcție de matricele antisimetrice ale rotațiilor relative și de matricele ortogonale de transformare. În continuare se aplică ecuațiile lui Lagrange, determinînd expresiile pentru energia cinetică a sistemului și pentru forțele generalizate.

1. Introducere

În cele ce urmează se stabilesc, sub forma matriceală, expresiile de calcul pentru viteze și accelerații precum și ecuațiile diferențiale ale mișcării unui mecanism prevăzut cu legături cardanice.

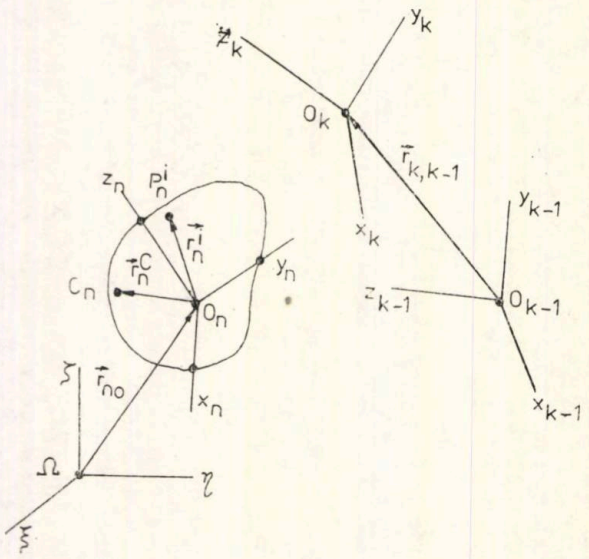


Fig. 1

Vom considera un reper fix $\Omega\xi\eta\zeta(T_0)$ în raport cu care se deplasează sub acțiunea forțelor exterioare $\vec{F}_k^i$, sistemul de corpuri T_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ solidare cu triedrele mobile $O_k x_k y_k z_k$ (fig. 1).

Dacă vom presupune că originile acestor triedre coincid cu articulațiile rigidelor, parametrii de poziție ai sistemului T_k, în raport cu reperul mobil T_{k-1}, vor fi coordonatele relative $x_{k,k-1}, y_{k,k-1}, z_{k,k-1}$ ale originii O_k și unghiurile relative ale lui Euler $\psi_{k,k-1}$, $\theta_{k,k-1}$, $\varphi_{k,k-1}$ formate de axele $O_k x_k$, $O_k y_k$, $O_k z_k$ cu axele $O_{k-1}x_{k-1}$, $O_{k-1}y_{k-1}$, $O_{k-1}z_{k-1}$. Acești parametri formează matricele coloane

$$(r_{k,k-1}) = \begin{bmatrix} x_{k,k-1} \\ y_{k,k-1} \\ z_{k,k-1} \end{bmatrix}, \quad (\lambda_{k,k-1}) = \begin{bmatrix} \psi_{k,k-1} \\ \theta_{k,k-1} \\ \varphi_{k,k-1} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

* Șef lucrări dr. ing., catedra Mecanică

și matricea ortogonală $[a_{k,k-1}]$ de trecere din sistemul mobil T_{k-1} în sistemul alăturat T_k :

$$[a_{k,k-1}] = [a_{\varphi}^{k,k-1}][a_{\theta}^{k,k-1}][a_{\psi}^{k,k-1}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{k,k-1} & \alpha_{12}^{k,k-1} & \alpha_{13}^{k,k-1} \\ \alpha_{21}^{k,k-1} & \alpha_{22}^{k,k-1} & \alpha_{23}^{k,k-1} \\ \alpha_{31}^{k,k-1} & \alpha_{32}^{k,k-1} & \alpha_{33}^{k,k-1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

ale cărei elemente sînt

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^{k,k-1} &= \cos\psi_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1} - \sin\psi_{k,k-1}\cos\theta_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1} \\
\alpha_{12}^{k,k-1} &= \sin\psi_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1} + \cos\psi_{k,k-1}\cos\theta_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1} \\
\alpha_{13}^{k,k-1} &= \sin\theta_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1} \\
\alpha_{21}^{k,k-1} &= -\cos\psi_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1} - \sin\psi_{k,k-1}\cos\theta_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1} \\
\alpha_{22}^{k,k-1} &= -\sin\psi_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1} + \cos\psi_{k,k-1}\cos\theta_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1} \\
\alpha_{23}^{k,k-1} &= \sin\theta_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1} \\
\alpha_{31}^{k,k-1} &= \sin\psi_{k,k-1}\sin\theta_{k,k-1} \\
\alpha_{32}^{k,k-1} &= -\cos\psi_{k,k-1}\sin\theta_{k,k-1} \\
\alpha_{33}^{k,k-1} &= \cos\theta_{k,k-1}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Poziția absolută a originii O_n a triedrului $O_n x_n y_n z_n$, solidar cu rigidul T_n, este dată de vectorul $\vec{r}_{n0}$, exprimat prin proiecții pe axele reperului fix :

$$(r_{n0}) = \sum_{k=0}^{n-1} [a_{k0}]^T (r_{k+1,k}), \tag{4}$$

unde s-a notat

$$[a_{k0}]^T = [a_{10}]^T [a_{21}]^T \ldots [a_{k,k-1}]^T = \prod_{j=1}^{k} [a_{j,j-1}]^T. \tag{5}$$

2. Distribuția vitezelor

Observînd că

$$(v_{k,k-1}) = (\dot{r}_{k,k-1}) = 0, \tag{6}$$

mișcările relative ale celor n elemente ale mecanismului cardanic vor fi caracterizate numai prin vitezele unghiulare relative $\vec{\omega}_{k,k-1}$ cărora li se asociază matricele antisimetrice

$$[\omega_{k,k-1}] = [a_{k,k-1}][\dot{a}_{k,k-1}]^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^{k,k-1} & \omega_y^{k,k-1} \\ \omega_z^{k,k-1} & 0 & -\omega_x^{k,k-1} \\ -\omega_y^{k,k-1} & \omega_x^{k,k-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Pentru a calcula viteza absolută a articulaţiei O_n, mai întîi se derivează (4) în raport cu timpul

$$(\dot{r}_{n0}) = \sum_{k=0}^{n-1} [\dot{a}_{k0}]^T (r_{k+1,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} [a_{k0}]^T [\omega_{k0}](r_{k+1,k}), \tag{8}$$

şi apoi se înmulţeşte la stînga cu matricea

$$[a_{n0}] = [a_{n,n-1}] \dots [a_{21}][a_{10}] = \prod_{j=1}^{n} [a_{n-j+1,n-j}]; \tag{9}$$

rezultă matricea componentelor pe axele legate de rigidul T_n;

$$(v_{n0}) = \sum_{k=1}^{n-1} [a_{nk}][\omega_{k,k-1}] \sum_{q=k}^{n-1} [a_{qk}]^T (r_{q+1,q}), \tag{10}$$

în care s-a notat

$$[a_{nk}] = \prod_{j=1}^{n-k} [a_{n-j+1,n-j}], \quad [a_{qk}]^T = \prod_{j=k+1}^{q} [a_{j,j-1}]^T. \tag{11}$$

Viteza absolută a unui punct oarecare P_n^i al elementului T_n se poate determina cu formula

$$(v_{n0}^i) = (v_{n0}) + [\omega_{n0}](r_n^i), \tag{12}$$

unde

$$(r_n^i) = \begin{bmatrix} x_n^i \\ y_n^i \\ z_n^i \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Matricea antisimetrică a rotaţiei absolute a rigidului considerat $[\omega_{n0}]$, care apare în (12), este asociată vitezei unghiulare absolute

$$(\omega_{n0}) = \sum_{k=1}^{n} [a_{nk}](\omega_{k,k-1}) \tag{14}$$

şi are următoarea expresie

$$[\omega_{n0}] = \sum_{k=1}^{n} [a_{nk}][\omega_{k,k-1}][a_{nk}]^T. \tag{15}$$

3. Distribuţia acceleraţiilor

Să derivăm în raport cu timpul, mai departe, relaţia (8) :

$$(\ddot{r}_{n0}) = \sum_{k=0}^{n-1} [\ddot{a}_{k0}]^T (r_{k+1,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} [a_{k0}]^T \{[\omega_{k0}]^2 + [\dot{\omega}_{k0}]\} (r_{k+1,k}). \tag{16}$$

Dacă vom înmulți la stînga această relație cu matricea (9), se obține matricea componentelor, după axele triedrului mobil T_n, ale accelerației absolute a originii O_n:

$$(\gamma_{n0}) = \sum_{k=1}^{n-1} [a_{nk}] \{ \{ [\omega_{k,k-1}]^2 + [\dot{\omega}_{k,k-1}] \} \sum_{q=k}^{n-1} [a_{qk}]^T (r_{q+1,q}) +$$

$$+ 2[\omega_{k,k-1}] \sum_{q=k+1}^{n-1} [a_{qk}]^T [\omega_{q,q-1}] \sum_{s=q}^{n-1} [a_{sq}]^T (r_{s+1,s}) \}. \tag{17}$$

Accelerația absolută a punctului P_n^i al rigidului T_n se calculează cu relația

$$(\gamma_{n0}^i) = (\gamma_{n0}) + \{ [\omega_{n0}]^2 + [\dot{\omega}_{n0}] \} (r_n^i), \tag{18}$$

unde matricea antisimetrică $[\dot{\omega}_{n0}]$ este asociată matricei coloană

$$(\dot{\omega}_{n0}) = \sum_{k=1}^{n-1} [a_{nk}][\omega_{k,k-1}] \sum_{q=k+1}^{n} [a_{qk}]^T (\omega_{q,q-1}) + \sum_{k=1}^{n} [a_{nk}] (\dot{\omega}_{k,k-1}) \tag{19}$$

și are expresia

$$[\dot{\omega}_{n0}] = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{q=k+1}^{n} \{ [a_{nk}] [\omega_{k,k-1}][a_{qk}]^T [\omega_{q,q-1}][a_{nq}]^T -$$

$$- [a_{nq}][\omega_{q,q-1}]^T [a_{qk}][\omega_{k,k-1}]^T [a_{nk}]^T \} + \tag{20}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} [a_{nk}][\dot{\omega}_{k,k-1}][a_{nk}]^T.$$

De asemenea, matricea pătratică $[\omega_{n0}]^2 + [\dot{\omega}_{n0}]$, care apare în formula de calcul (18), poate fi exprimată astfel

$$[\omega_{n0}]^2 + [\dot{\omega}_{n0}] = \sum_{k=1}^{n-1} [a_{nk}] \{ \{ [\omega_{k,k-1}]^2 + [\dot{\omega}_{k,k-1}] \} [a_{nk}]^T + \tag{21}$$

$$+ 2[\omega_{k,k-1}] \sum_{q=k+1}^{n} [a_{qk}]^T [\omega_{q,q-1}][a_{nq}]^T \} + [\omega_{n,n-1}]^2 + [\dot{\omega}_{n,n-1}].$$

4. Ecuațiile de mișcare

Să presupunem că cele n solide ale mecanismului cardanic sînt supuse unor legături ideale și că au astfel $\nu < 3n$ grade de libertate. Astfel, vom face ipoteza că un element oarecare T_k alunecă în punctele B_k^l pe suprafețele $\sum_{k-1}^{l}$ de ecuații

$$g_{k-1}^l(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}) = 0, \ (l \parallel 1, 2). \tag{22}$$

Aceste legături aparţin rigidului T_{k-1} solidar cu triedrul $O_{k-1}x_{k-1}y_{k-1}z_{k-1}$. Cele ν coordonate generalizate q_r pot fi o parte din unghiurile relative ale lui Euler. Variaţia în timp a acestor parametri seobţine cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_r}\right\} - \frac{\partial E}{\partial q_r} = Q_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{25}$$

Energia cinetică E a sistemului are expresia

$$E = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{n} (V_{\sigma 0})^T [M_\sigma](V_{\sigma 0}), \tag{24}$$

în care

$$(V_{\sigma 0}) = \left[\frac{(v_{\sigma 0})}{(\omega_{\sigma 0})}\right] \tag{25}$$

reprezintă viteza dual absolută a solidului T_σ în articulaţia sa O_σ, iar

$$[M_\sigma] = \left[\begin{array}{c|c} [m_\sigma] & [m_\sigma][r_\sigma^C]^T \\ \hline [m_\sigma][r_\sigma^C] & [J_\sigma] \end{array}\right] \tag{26}$$

este matricea completă de inerţie. Dacă se dezvoltă (24) se obţine forma echivalentă

$$E = \sum_{\sigma=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(v_{\sigma 0})^T[m_\sigma](v_{\sigma 0}) + \frac{1}{2}(\omega_{\sigma 0})^T[J_\sigma](\omega_{\sigma 0}) + (v_{\sigma 0})^T[m_\sigma][\omega_{\sigma 0}](r_\sigma^C)\right\}, \tag{27}$$

unde

$$[m_\sigma] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad [J_\sigma] = \begin{bmatrix} J_x^\sigma & -J_{xy}^\sigma & -J_{xz}^\sigma \\ -J_{yx}^\sigma & J_y^\sigma & -J_{yz}^\sigma \\ -J_{zx}^\sigma & -J_{zy}^\sigma & J_z^\sigma \end{bmatrix} \tag{28}$$

reprezintă matricea diagonală a masei m_σ şi, respectiv, matricea tensorului de inerţie al rigidului T_σ relativ la reperul $O_\sigma x_\sigma y_\sigma z_\sigma$. Observînd că

$$(\omega_{k,k-1}) = [s_{k,k-1}](\dot{\lambda}_{k,k-1}), \quad [s_{k,k-1}] = \begin{bmatrix} \sin\theta_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1} & \cos\varphi_{k,k-1} & 0 \\ \sin\theta_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1} & -\sin\varphi_{k,k-1} & 0 \\ \cos\theta_{k,k-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

energia cinetică (27) poate fi reprezentată prin funcţia

$$E = f(\psi_{k,k-1}, \theta_{k,k-1}, \varphi_{k,k-1}, \dot{\psi}_{k,k-1}, \dot{\theta}_{k,k-1}, \dot{\varphi}_{k,k-1}),$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n). \tag{30}$$

Însă, ținînd seama de relațiile matriceale

$$(r_{k-1}) = (r_{k,k-1}) + [a_{k,k-1}]^T(r_k^l), \tag{31}$$

crise pentru punctele B_k^l, condițiile de legătură (22) devin

$$g_{k-1}^l(\psi_{k,k-1}, \theta_{k,k-1}, \varphi_{k,k-1}) = 0. \tag{32}$$

De asemenea, condițiile de compatibilitate a mișcării mecanismului

$$(\omega_{k,k-1})^T[r_k^l][a_{k,k-1}](\nabla g_{k-1}^l) = 0, \tag{33}$$

crise pentru vitezele unghiulare relative (29), conduc la relații de forma

$$h_{k-1}^l(\psi_{k,k-1}, \theta_{k,k-1}, \varphi_{k,k-1}, \dot{\psi}_{k,k-1}, \dot{\theta}_{k,k-1}, \dot{\varphi}_{k,k-1}) = 0, \tag{34}$$

are arată că variabilele funcției (30) nu sînt independente.

Pentru determinarea forțelor generalizate Q_r se calculează puterea irtuală dezvoltată de forțele exterioare $\vec{F}_\sigma^i (i = 1, 2, \ldots, t_\sigma)$, aplicate în unctele A_σ^i, în timpul unei deplasări virtuale generale, compatibilă cu egăturile, adică

$$\hat{P} = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{t_\sigma} \{(\hat{v}_{\sigma 0})^T(f_\sigma^i) + (\hat{\omega}_{\sigma 0})^T[r_\sigma^i](f_\sigma^i)\}. \tag{35}$$

Viteza virtuală absolută $(\hat{v}_{\sigma 0})$ a articulației O_σ și viteza unghiulară bsolută $(\hat{\omega}_{\sigma 0})$ a solidului T_σ în jurul acestui punct pot fi exprimate în uncție de vitezele unghiulare virtuale $(\hat{\omega}_{k,k-1})$ și de matricele antisimetrice $\hat{\omega}_{k,k-1}]$:

$$\begin{aligned} (\hat{v}_{\sigma 0}) &= \sum_{k=1}^{\sigma-1} [a_{\sigma k}][\hat{\omega}_{k,k-1}] \sum_{q=k}^{\sigma-1} [a_{qk}]^T(r_{q+1,q}), \\ (\hat{\omega}_{\sigma 0}) &= \sum_{k=1}^{\sigma} [a_{\sigma k}](\hat{\omega}_{k,k-1}), \end{aligned} \tag{36}$$

nde matricea $[a_{\sigma k}]$ are expresia

$$[a_{\sigma k}] = [a_{\sigma,\sigma-1}][a_{\sigma-1,\sigma-2}] \cdots [a_{k+1,k}] = \prod_{j=1}^{\sigma-k} [a_{\sigma-j+1,\sigma-j}]. \tag{37}$$

Condițiile cinematice de legătură, la care sînt supuse vitezele irtuale ale punctelor de contact B_σ^l se exprimă prin relații asemănătoare u (33), adică

$$(\hat{\omega}_{\sigma,\sigma-1})^T[r_\sigma^l][a_{\sigma,\sigma-1}](\nabla g_{\sigma-1}^l) = 0, \tag{38}$$

în care

$$(\nabla g^l_{\sigma-1}) = \left[\frac{\partial g^l_{\sigma-1}}{\partial x_{\sigma-1}} \quad \frac{\partial g^l_{\sigma-1}}{\partial y_{\sigma-1}} \quad \frac{\partial g^l_{\sigma-1}}{\partial z_{\sigma-1}}\right]^T \tag{39}$$

este matricea coloană a vectorului gradient $\overrightarrow{\nabla} g^l_{\sigma-1}$.

Vitezele unghiulare relative $(\hat{\omega}_{\sigma,\sigma-1})$, care apar în (38) depind de vitezele unghiulare virtuale $\hat{\dot{\psi}}_{\sigma,\sigma-1}$, $\hat{\dot{\theta}}_{\sigma,\sigma-1}$, $\hat{\dot{\varphi}}_{\sigma,\sigma-1}$ prin relațiile

$$(\hat{\omega}_{\sigma,\sigma-1}) = [s_{\sigma,\sigma-1}](\hat{\dot{\lambda}}_{\sigma,\sigma-1}), \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n). \tag{40}$$

Observație

Dacă coordonatele generalizate sînt cîteva din unghiurile absolute ale lui Euler ψ_{k0}, θ_{k0}, φ_{k0}, atunci vitezele virtuale $(\hat{v}_{\sigma 0})$ și $(\hat{\omega}_{\sigma 0})$ vor avea expresiile

$$(\hat{v}_{\sigma 0}) = [a_{\sigma 0}] \sum_{r=1}^{\nu} \hat{\dot{q}}_r \frac{\partial}{\partial q_r}(r_{\sigma 0}),$$

$$(\hat{\omega}_{\sigma 0}) = [s_{\sigma 0}] \sum_{r=1}^{\nu} \hat{\dot{q}}_r \frac{\partial}{\partial q_r}(\lambda_{\sigma 0}), \tag{41}$$

în care s-a notat,

$$[s_{\sigma 0}] = \begin{bmatrix} \sin\theta_{\sigma 0} \sin\varphi_{\sigma 0} & \cos\varphi_{\sigma 0} & 0 \\ \sin\theta_{\sigma 0} \cos\varphi_{\sigma 0} & -\sin\varphi_{\sigma 0} & 0 \\ \cos\theta_{\sigma 0} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\lambda_{\sigma 0}) = \begin{bmatrix} \psi_{\sigma 0} \\ \theta_{\sigma 0} \\ \varphi_{\sigma 0} \end{bmatrix}. \tag{42}$$

În acest caz, forțele generalizate se scriu sub forma

$$Q_r = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{t_\sigma} \left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial q_r}(r_{\sigma 0})^T \right\} [a_{\sigma 0}]^T (f^i_\sigma) + \left\{ \frac{\partial}{\partial q_r}(\lambda_{\sigma 0})^T \right\} [s_{\sigma 0}]^T [r^i_\sigma](f^i_\sigma) \right\},$$

$$(r = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{43}$$

iar energia cinetică se calculează cu aceeași formulă (27), în care matricele $[a_{\sigma k}]$, $[\omega_{k,k-1}]$ și $(\omega_{k,k-1})$ se vor exprima în funcție de matricele rotațiilor absolute

$$[a_{\sigma k}] = [a_{\sigma 0}][a_{k0}]^T,$$

$$[\omega_{k,k-1}] = [\omega_{k0}] - [a_{k0}][a_{k-1,0}]^T[\omega_{k-1,0}][a_{k-1,0}][a_{k0}]^T, \tag{44}$$

$$(\omega_{k,k-1}) = (\omega_{k0}) - [a_{k0}][a_{k-1,0}]^T(\omega_{k-1,0}).$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Șt. Staicu*, Introducere în mecanica teoretică, Ed. Științifică și enciclopedică, București, 1983.
2. *V. Vâlcovici, Șt. Bălan, R. Voinea*, Mecanica teoretică, Ed. Tehnică, București, 1968.
3. *D. Mangeron, N. Irimiciuc*, Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie , Ed. Tehnică, București, 1978 (vol. I), 1980 (vol. II), 1981 (vol. III).
4. *C. Iacob*, Mecanica teoretică, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1971.
5. *F. M. Dimentberg*, Teoria vintov i ee prilojenia, Ed. Nauka, Moskva, 1978.
6. *G. E. Mase*, Theory and problems of continuum mechanics, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1970.
7. *J. Wittenburg*, Dynamics of systems of rigid bodies, Stuttgart, 1977, Mir, Moskva, 1980.

Etude du mouvement des mécanismes cardaniques par des méthodes matricielles

L'article détermine, sous forme matricielle, les équations de mouvement d'un mécanisme cardanique. On établit, les formules matricielles pour les distributions des vitesses et des accélérations, en fonction des matrices antisymétriques des rotations relatives et des matrices orthogonales de transformation. En suite on utilise les équations de Lagrange, en déterminant les expressions de l'energie cinétique du système et des forces généralisées.

C.Z. :629.7.027
517

STUDIUL MIȘCĂRII UNUI ATERIZOR PNEUMATIC NELINIAR

P. V. MARINESCU *

Lucrarea de față se ocupă cu studiul mișcării oscilatorii a unui tip de aterizor pneumatic neliniar în absența amortizării. Sînt stabilite ecuațiile mișcării unui astfel de oscilator, dependența dintre diferiții parametri care caracterizează mișcarea. De asemenea, este scoasă în evidență influența exponentului politropic asupra performanțelor tipului de aterizor studiat. Rezultatele obținute permit determinarea cursei maxime a cilindrului aterizorului și a forței la joncțiunea dintre cilindru și masa atașată acestuia.

1. Introducere

Să considerăm sistemul de aterizare din figura 1 format din cili drul (1) de masă m_c, pistonul (2) umplut cu aer și masa cu aer și ma concentrată a avionului m_a. Pentru simplificare vom admite că roata (asigură numai rulajul la aterizare.

Din momentul contactului roții (3) cu solul, viteza verticală a cili drului (și a masei atașate) se micșorează continuu pînă cînd se anuleaz

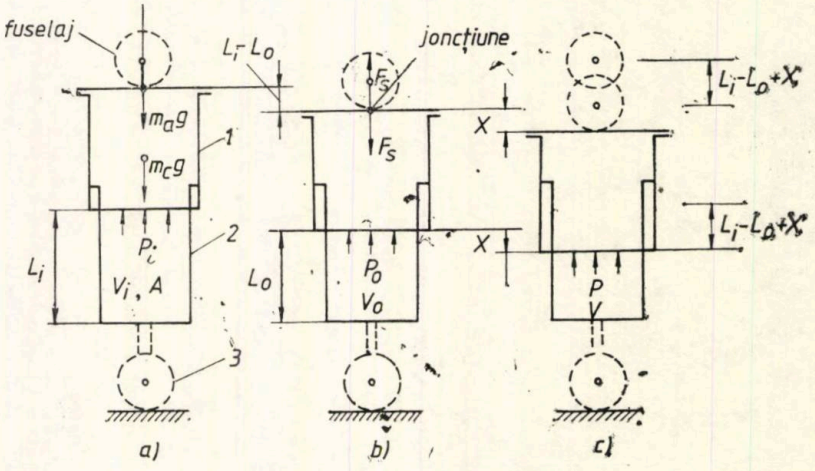


Fig. 1

după care cilindrul va executa o mișcare oscilatorie în jurul unei poz de echilibru.

Variația energiei cinetice după direcția verticală a maselor în mișc se datorează lucrului mecanic al forțelor care acționează asupra aces

* Șef lucrări dr. ing., catedra Aeronave

nase pe distanța ce se realizează datorită comprimării aerului aflat în nteriorul cavității pistonului (2). Forța F_s care apare la joncțiunea dintre ilindru și fuselajul avionului este funcție de deplasarea pe verticală a nasei avionului în timpul aterizării și deci de viteza verticală de aterizare, nasa avionului, dimensiunile pistonului și de presiunea inițială a aerului flat în interiorul lui.

2. Ecuația mișcării

Să considerăm sistemul de aterizare în trei poziții :

— în zbor (fig. 1a), cînd datorită presiunii inițiale P_i a aerului din nteriorul pistonului, volumul cavității acestuia este $V_i = L_i A$;

— în poziție de echilibru (fig. 1 b), cînd presiunea din spațiul interior istonului echilibrează greutatea avionului și a cilindrului considerate în epaus, iar volumul cavității pistonului este $V_0 = L_0 A$;

— într-o poziție oarecare (fig. 1c) în timpul aterizării cînd viteza accelerația verticală a sistemului în mișcare este $\dot{X}$ și respectiv $\ddot{X}$.

Cu notațiile considerate (fig. 1) pot fi scrise ecuațiile

$$m_a \ddot{X} = m_a g - F_S \tag{1}$$

$$m_c \ddot{X} = m_c g - PA + F_S \tag{2}$$

u ecuația

$$(m_a + m_c)\ddot{X} = (m_a + m_c)g - PA \tag{3}$$

Deoarece între presiunea P care acționează asupra cilindrului și olumul ocupat de aerul comprimat există relația

$$P = P_i \left(\frac{V_i}{V}\right)^n \tag{4}$$

care V_i reprezintă volumul inițial al aerului comprimat în cavitatea stonului iar n exponentul politropic, se poate scrie ecuația (3) sub forma :

$$\ddot{X} = g - \frac{P_i A}{m_a + m_c}\left(\frac{V_i}{V}\right)^n \tag{5}$$

de

$$V = L_i A - (L_i - L_0 - X)A \tag{6}$$

Notînd cu k_p constanta arcului pneumatic definită prin relația

$$k_p = \frac{nA^2 P_i}{V_i} \tag{7}$$

și cu ω_n pulsația proprie a arcului pneumatic dată de relația :

$$\omega_n^2 = \frac{k_p}{m_a + m_c} \tag{8}$$

se obține în cele din urmă ecuația de mișcare a cilindrului sub formă adimensională

$$\frac{\ddot{X}}{L_i\omega_n^2} = \frac{g}{L_i\omega_n^2} - \frac{1}{n}\left(\frac{L_i}{L_0}\right)^n \left(1 - \frac{X}{L_i}\frac{L_i}{L_0}\right)^{-n} \tag{9}$$

Distanța L_0 din ecuația precedentă este dată de egalitatea

$$(m_a + m_c)g = P_0 A \tag{10}$$

în care

$$P_0 = P_i\left(\frac{V_i}{V_0}\right)^n = P_i\left(\frac{L_i}{L_0}\right)^n \tag{11}$$

Ecuația (10) se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{g}{L_i} = \frac{1}{n}\frac{k_p}{m_a + m_c}\left(\frac{L_i}{L_0}\right)^n \tag{12}$$

din care se obține

$$\omega_n^2 = \frac{ng}{L_i}\left(\frac{L_0}{L_i}\right)^n; \quad \frac{L_0}{L_i} = \left(\frac{L_i}{ng}\omega_n^2\right)^{1/n} \tag{13}$$

Înlocuind expresia pulsației dată de ecuația (13) în ecuația (9) rezultă ecuația mișcării oscilatorii a cilindrului față de poziția de echilibr

$$\frac{d^2\bar{X}}{d\tau^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{L_i}{L_0}\right)^n \left[1 - \left(1 - \bar{X}\frac{L_i}{L_0}\right)^{-n}\right] \tag{14}$$

în care $\tau = \omega_n t$ și $\bar{X} = X/L_i$

Ecuația precedentă se poate integra cu condiția ca la $\tau = 0$, $d\bar{X}/d\tau = (d\bar{X}/d\tau)_{max}$, ținînd seama de valoarea exponentului politropic. Pentru $n \neq 1$, avînd în vedere că

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\bar{X}}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\bar{X}}\left(\frac{d\bar{X}}{d\tau}\right)\frac{d\bar{X}}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\bar{X}}\left(\frac{d\bar{X}}{d\tau}\right)^2 \tag{15}$$

se obține variația vitezei $d\bar{X}/d\tau$ în funcție de distanța $\bar{X}$, sub forma

$$\frac{d\bar{X}}{d\tau} = \left[\left(\frac{d\bar{X}}{d\tau}\right)_{max} + \frac{2}{n}\left(\frac{L_i}{L_0}\right)^n \left\{\frac{L_i}{L_0}\frac{1}{1-n}\left[\left(1 - \bar{X}\frac{L_i}{L_0}\right)^{1-n} - 1\right] + \bar{X}\right\}\right] \tag{16}$$

Pentru $n = 1$, în urma integrării ecuaţiei (14) rezultă

$$\frac{d\bar{X}}{d\tau} = \left\{\left(\frac{d\bar{X}}{d\tau}\right)_{max} + 2\left(\frac{L_i}{L_0}\right)\left[\frac{L_i}{L_0}\ln\left(1 - \bar{X}\frac{L_i}{L_0}\right) + \bar{X}\right]\right\}^{1/2} \qquad (17)$$

în care $(d\bar{X}/d\tau)_{max}$ reprezintă viteza maximă a cilindrului în poziţia în care aerul ocupă în interiorul pistonului volumul L_0A şi deci pentru $\bar{X} = 0$.

3. Poziţia minimă a cilindrului

Să notăm cu L_0' poziţia cea mai de jos a cilindrului în raport cu pistonul corespunzătoare vitezei nule. Se poate scrie ecuaţia

$$(m_a + m_c)\frac{v_i^2}{2} = (m_a + m_c)(L_i - L_0') - \int_0^{L_i - L_0'} PA\, dX' \qquad (18)$$

în care v_i reprezintă viteza verticală a avionului în momentul în care roata atinge solul. Deoarece

$$P = P_i(V_i/V)^n, \qquad V_i = L_iA$$
$$V = (L_i - X')A \qquad (19)$$

se obţine în urma integrării ecuaţia

$$\left(1 - \frac{L_0'}{L_i} + \frac{L_0'}{L_i}\ln\frac{L_0'}{L_i}\right)\frac{2gL_i}{v_i^2} = 1 \qquad (20)$$

pentru $n \neq 1$, şi

$$\left\{1 - \frac{L_0'}{L_i} + \left(\frac{L_0'}{L_i}\right)^n \frac{1}{1-n}\left[\left(\frac{L_0'}{L_i}\right)^{1-n} - 1\right]\right\}\frac{2gL_i}{v_i^2} = 1 \qquad (21)$$

pentru $n \neq 1$,

Ultimele două ecuaţii permit determinarea distanţei L_0'/L_i la care viteza cilindrului se anulează.

4. Viteza maximă a cilindrului

Viteza cilindrului la cursa de urcare poate fi calculată cu ajutorul ecuaţiei (fig. 2)

$$\frac{mv_x^2}{2} = \int_0^x PA\, dx' - mgx \qquad (22)$$

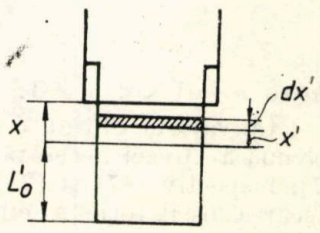


Fig. 2

sau

$$\frac{mv_x^2}{2} = P_i A \int_0^x \left(\frac{V_i}{V}\right)^n \mathrm{d}x' - mgx \tag{23}$$

în care v_x reprezintă viteza la o distanță x măsurată față de poziția minimă a cilindrului. Deoarece

$$V_i = L_i A, \quad V = (L_0' + x')A \tag{24}$$

și efectuînd calculele se obține

$$v_x^2 = 2gL_i \left\{\left(\frac{L_0}{L_i}\right)^n \left(\frac{L_0'}{L_i}\right)^{1-n} \frac{1}{1-n}\left[\left(1 + \frac{x}{L_0'}\right)^{1-n} - 1\right] - \frac{x}{L_i}\right\} \tag{25}$$

pentru $n \neq 1$ și

$$v_x^2 = 2\,gL_i \left[\frac{L_0}{L_i} \ln\left(1 + \frac{x}{L_0'}\right) - \frac{x}{L_i}\right] \tag{26}$$

pentru $n = 1$.

Sub formă adimensională așa cum s-a procedat anterior ultimele două ecuații devin

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \frac{2}{n}\left(\frac{L_i}{L_0}\right)^n \left\{\left(\frac{L_0}{L_i}\right)^n \left(\frac{L_0'}{L_i}\right)^{1-n} \frac{1}{1-n}\left[\left(1 + \bar{x}\,\frac{L_i}{L_0'}\right)^{1-n} - 1\right] - \bar{x}\right\} \tag{27}$$

și respectiv

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 2\,\frac{L_i}{L_0}\left[\frac{L_0}{L_i} \ln\left(1 + \bar{x}\,\frac{L_i}{L_0'}\right) - \bar{x}\right] \tag{28}$$

Se observă că viteza devine maximă atunci cînd

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{x}}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\tau}\right) = 0 \tag{29}$$

și corespuunde unei deplasări

$$\bar{x}_{\max} = \frac{L_0}{L_i} - \frac{L_0'}{L_i} \tag{30}$$

pentru $n = 1$ sau $n \neq 1$.

Cu valorile obținute pentru deplasarea $\bar{x}_{\max}$ se poate calcula valoarea maximă a vitezei necesară în ecuațiile (16) și (17). Ambele ecuații (16) și (27), respectiv (17) și (28) pot servi pentru calculul variației vitezei în mișcarea oscilatorie a cilindrului.

5. Forța la joncțiunea cilindru-fuselaj

Ecuațiile (1) și (9) asociate conduc la calculul forței la joncțiunea dintre cilindru și fuselajul avionului, avînd expresia

$$F_S = \frac{m_a g}{\left(1 - \frac{X}{L_i}\frac{L_i}{L_0}\right)^n} \tag{31}$$

Forța F_s are valoarea maximă pentru $X = L_0 - L_0'$ și deci pentru

$$F_S = mg\left(\frac{L_0}{L_0'}\right)^n, \quad \bar{F}_S = \frac{F_S}{mg} \tag{32}$$

De exemplu, pentru $\beta = 2gL_i/v_i^2 = 1$ se obțin valorile:

$$n = 1, \ \bar{F}_s = 2{,}142$$

$$n = 1{,}2, \ \bar{F}_s = 2{,}102$$

$$n = 1{,}4, \ \bar{F}_s = 2{,}052$$

6. Rezultate și concluzii

În ecuațiile precedente dacă se consideră drept mărimi cunoscute n, A, P_i, v_i, L_i, masa (m_a+m_c) și deci parametrul adimensional $\beta = 2gL_i/v_i^2$ se poate calcula constanta arcului pneumatic, pulsația proprie (ec. 7 și 8) și mai departe raportul L_0/L_i dat de ecuația (13). Cilindrul va executa o mișcare oscilatorie în jurul poziției de echilibru date de raportul L_0/L_i.

În procesul de proiectare a sistemului de față se urmărește în primul rînd limitarea acestui raport astfel ca la cursa de ridicare cilindrul să nu depășească capătul superior al pistonului. Deoarece în această poziție viteza cilindrului trebuie să fie nulă și știind că în această situație $\bar{x} = 1 - L_0'/L_i$ din ecuațiile (27) și (28), se obține

$$\left(\frac{L_0}{L_i}\right)_{\max} = \left[\frac{(1-n)(1-L_0'/L_i)}{1-(L_0'/L_i)^{1-n}}\right]^{1/n} \tag{33}$$

pentru $n \neq 1$, și

$$\left(\frac{L_0}{L_i}\right)_{\max} = \frac{1 - L_0'/L_i}{\ln(L_i/L_0')} \tag{34}$$

pentru $n = 1$.

Trebuie ca raportul L_0/L_i calculat cu ajutorul ecuației (13) să fie mai mic ca $(L_0/L_i)_{\max}$. Raportul L_0'/L_i din ecuațiile (33) și (34) este dat de ecuațiile (21) și (20).

În figura 3 se arată variația raportului $(L_0/L_i)_{\max}$ în funcție de parametrul β pentrutrei valori ale exponentului politropic. Determinarea cu

precizie a exponentului politropic este în general dificilă și de aceea o valoare cuprinsă între 1,1 și 1,2 poate fi considerată satisfăcătoare, deoarece procesul de comprimare și destindere a aerului în interiorul pistonului are ca limite extreme transformarea izotermică și adiabatică.

În figura 4 se arată variația distanței minime L_0'/L_i în funcție de parametrul β și de valoarea exponentului politropic. Distanța $\bar{x} = 1 -$

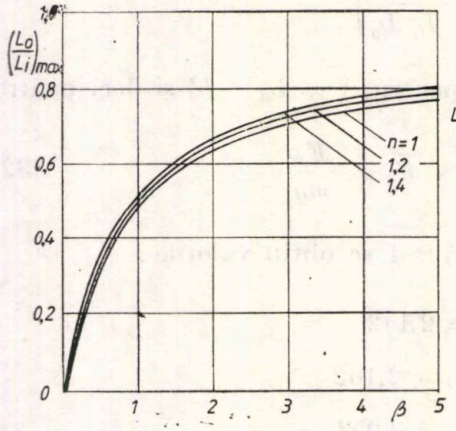


Fig. 3

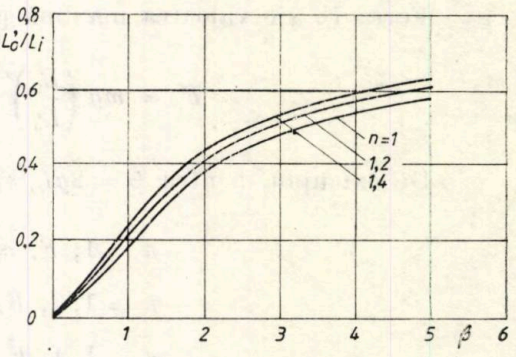


Fig. 4

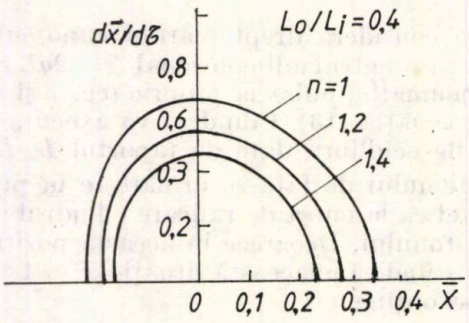


Fig. 5

$-L_0'/L_i$ determină cursa maximă a cilindrului în funcție de parametrul β și corespunde unei poziții de echilibru $(L_0/L_i)_{max}$ date de ecuațiile (33) și (34).

În figura 5 este reprezentată variația vitezei adimensionale $d\bar{X}/d\tau$ în timpul mișcării oscilatorii pentru trei valori ale exponentului politropic și pentru $L_0/L_i = 0,4$ și $\beta = 1$.

În lucrarea de față s-a studiat numai mișcarea oscilatorie neamortizată a cilindrului pentru a determina lungimea cursei maxime a cilindrului și forța la joncțiunea cilindru-fuselaj în momentul aterizării luînd în considerație diferite valori ale exponentului politropic. În general nu se observă variații substanțiale ale mărimilor calculate în funcție de valoarea exponentului politropic și de aceea se poate accepta în calcule o valoare medie de $1,1 \div 1,2$.

În studiul de față s-a considerat cazul simplu în care aterizorul este de tip pneumatic. Desigur, acesta nu reprezintă o soluție constructivă de aterizor datorită marii compresibilități a aerului și de aceea în practică se folosesc sisteme combinate pneumatice și hidraulice, care însă conțin parțial elementele studiate în prezenta lucrare.

BIBLIOGRAFIE

1. *B. W. Andersen*, The Analysis and Design of Pneumatic Systems, John Wiley § Sons Inc., 1967.

Nonlinear Pneumatic Landing System

In the present paper a pure pneumatic landing system is studied.

The basic equations of motion in the nonlinear analysis are established and performances of the system for several parameters are discussed. Also, the influence of politropic exponent is taken under consideration in this work.

C.Z.: 629.7: 531.383

GIROSCOPUL ACORDAT UTILIZAT ÎN SISTEME INERȚIALE DE NAVIGAȚIE AERIANĂ

I. STIHARU, C. BUNGETZIANU, CARMEN ALEXE *

În lucrare se prezintă modelul giroscopului acordat pornind de la ecuațiile de mișcare în coordonate legate de arbore sau carcasă.

Se pune în evidență modelul intrare-ieșire ca instrument de măsură, precum și condițiile de acord.

O aplicație directă a studiului este funcționarea giroscopului acordat ca traductor de viteză unghiulară și accelerație liniară pentru sisteme de navigație cu componente legate de structura aeronavei.

I. Descrierea instrumentului

Giroscopul cu suspensie elastică (fig. 1.) se compune dintr-un motor electric (1) cu sistem de reglare a turației care antrenează, prin intermediul arborelui (2) și a unei suspensii cardanice, rotorul giroscopic (5). Suspensia cu inel intermediar (4) și axe de rotație perpendiculare este realizată cu articulații elastice reprezentate de barele de torsiune (3). La o turație suficient de mare rotorul tinde să-și păstreze constant vectorul moment cinetic, deci și axa de rotație în raport cu spațiul inerțial astfel încît la o rotație a suportului (6) cu un unghi mic în raport cu acest spațiu arborele și rotorul vor avea axe de rotație diferite obligînd inelul să oscileze cu amplitudine unghiulară θ. Restricțiilor torsionale ale barelor elastice li se opun inerțiile maselor în mișcare oscilantă. Acestea se comportă ca elemente cu coeficient elastic, indus dinamic, negativ. Condițiile constructive și

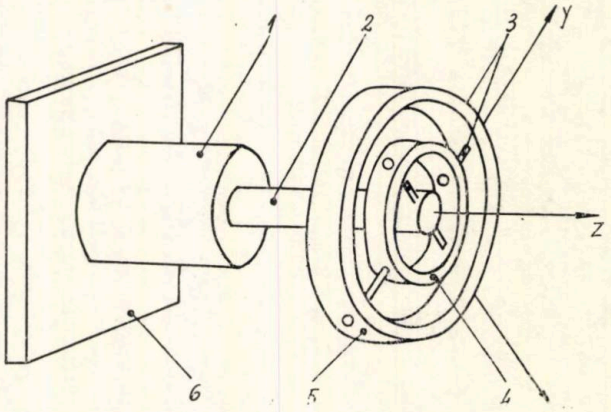


Fig. 1 — Construcția schematică a giroscopului acordat

* Șef lucrări dr. ing. : Asist. ing. ; Ing., catedra Aeronave

ncționale în care acești coeficienți elastici se anulează reciproc reprezintă ondițiile de acord și dau rotorului posibilitatea, pentru unghiuri de maxim °, de a se comporta ca giroscop liber, suspendat într-un punct. Se va studia n caz mai general, important la estimarea erorilor, în care rotorul și nelul nu sînt corpuri de revoluție și au momente principale de inerție iferite, centrele de masă și de suspensie se află pe axa Oz dar nu sînt oincidente și momentele de inerție centrifugale se consideră neglijabile.

II. Sisteme de coordonate și notații utilizate

În expunere se vor utiliza mai multe sisteme de coordonate cu riginea comună în centrul de suspensie. Într-o primă aproximație ecuaiile de mișcare se scriu în ipoteza coincidenței centrelor de masă și de uspensie. Se folosesc următoarele notații :

$OXYZ$ — triedru de referință legat de suport și motor.

$Oxyz$ — triedru de referință legat de arbore și rotindu-se cu acesta.

$Oxyz_r$ — triedru de referință legat de rotor.

$Oxyz_i$ — triedru de referință legat de inel : coincide cu articulația interioară și cu cea exterioară.

Mărimile fizice direct măsurabile sînt :

ω_x, ω_y — viteze unghiulare absolute ale suportului în coordonate legate de suport.

θ_x, θ_y — unghiurile axei de rotație a rotorului relative la suport.

M_x, M_y, M_z — cupluri externe aplicate rotorului relative la suport.

Ω — viteza unghiulară a arborelui relativ la suport.

Alte mărimi fizice utilizate în expunere

$\left.\begin{matrix}\omega_x, \omega_y, \omega_z \\ \omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi} \\ \omega_{xr}, \omega_{xr}, \omega_{zr}\end{matrix}\right\}$ — viteze unghiulare ale sistemelor de referință respective.

$\left.\begin{matrix}M_x, M_y, M_z \\ M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}\end{matrix}\right\}$ — cupluri externe aplicate rotorului raportate la sistemul legat de inel.

N — turația motorului giroscopic.

G_x, G_y — componentele greutății după axele Ox și Oy.

a — accelerația liniară.

δ_x, δ_y — deplasările centrilor de masă ale rotorului, respectiv inelului față de centrul de suspensie.

m, m_i — masele rotorului, respectiv inelului.

Parametrii constructivi :

$\left.\begin{matrix}A, B, C \\ A_i, B_i, C_i\end{matrix}\right\}$ — momentele de inerție principale ale rotorului și inelului.

K_x, K_y — coeficienți de elasticitate ai barelor de torsiune

M_r — cuplu de frecare vîscoasă rotor carcasă dirijat după axa de rotație.

$Z_x = Z_y = Z$ — coeficienți de amortizare pentru barele de torsiune.

Cupluri interne :

R_x, R_y, — cupluri aplicate de rotori inelului

R_{xa}, R_{ya} — cupluri aplicate de arbori inelului.

III. Relaţii între vitezele unghiulare în diverse axe de coordonate.

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_x \cos \Omega t + \omega_y \sin \Omega t. \\ \omega_y = -\omega_x \sin \Omega t + \omega_y \cos \Omega t \\ \omega_z \cong \Omega \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \omega_{xr} = \omega_x + \dot{\theta}_x - N\theta_y \\ \omega_{yr} = \omega_y + \dot{\theta}_y + N\theta_x \\ \omega_{zr} \cong \Omega \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \omega_{xi} = \omega_x + \dot{\theta}_x \\ \omega_{yi} = \omega_y + N\theta_x \\ \omega_{zi} \cong \Omega \end{cases} \tag{3}$$

IV. Cupluri acţionînd pe inel, arbore, rotor

$$\begin{cases} R_x - R_{xa} + M_{xi} = A_i\dot{\omega}_{xi} + (C_i - B_i)\omega_{yi}\omega_{zi} \\ R_y - R_{ya} + M_{yi} = B_i\dot{\omega}_{yi} - (C_i - A_i)\omega_{xi}\omega_{zi} \end{cases} \tag{4}$$

Ecuaţiile (4) sînt ecuaţiile Euler pentru inel, iar (5) caracterizează cuplurile interne

$$\begin{cases} R_{xa} = K_x\theta_x + Z\dot{\theta}_x \\ R_y = K_y\theta_y + Z\dot{\theta}_y \end{cases} \tag{5}$$

Rezultă ecuaţiile (6) :

$$\begin{cases} R_x = K_x\theta_x + Z\dot{\theta}_x + A_i\dot{\omega}_{xi} + (C_i - B_i)\,\Omega\omega_{yi} - M_{xi} \\ R_{ya} = K_y\theta_y + Z\dot{\theta}_y - B_i\dot{\omega}_{yi} + (C_i - A_i)\Omega\omega_{xi} + M_{yi} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} M_x - R_x - M_r\theta_y = A\dot{\omega}_{xr} + (C - B)\Omega\omega_{yr} \\ M_y - R_y + M_r\theta_x = B\dot{\omega}_{yr} - (C - A)\Omega\omega_{xr} \end{cases} \tag{7}$$

$$M_z + M_r = (B - A)\omega_{xr}\omega_{yr} \tag{8}$$

Relaţiile (7) sînt relaţiile Euler pentru rotor, iar (8) reprezintă cuplul transmis prin arbore pentru menţinerea unei viteze constante Ω.

V. Ecuaţiile giroscopului în coordonate legate de arbore

Utilizînd relaţiile de transformare (2) şi (3) rezultă :

$$\begin{cases} M_x + M_{xi} = \ddot{\theta}_x(A + A_i) + \dot{\theta}_x Z + \theta_x[(C - B + C_i - B_i)\Omega^2 + K_x] + \ddot{\theta}_y A_i \\ \quad + \dot{\theta}_y[(-A - B + C)\Omega] + \theta_y M_r + \dot{\omega}_x(A + A_i) + \\ \quad + \omega_y[(C - B + C_i - B_i)\Omega] \\ M_y = \ddot{\theta}_y B + \dot{\theta}_y Z + \theta_y[(C - A)\Omega^2 + K_y] + \dot{\theta}_x[(-C + A + B)\Omega] \\ \quad - \theta_x M_r + \dot{\omega}_y B + \omega_x[-(C - A)\Omega] \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} G_x = \ddot{\theta}_x(A + A_i) + \dot{\theta}_x Z + \theta_x[(C - B + C_i - B_i)\Omega^2 + K_x] + \\ \quad + \ddot{\theta}_y A_i + \theta_y M_r. \\ G_y = \ddot{\theta}_y B + \dot{\theta}_y Z + \theta_y[(C - A)\Omega^2 + K_y] - \dot{\theta}_x[(C - A - B)\Omega] - \theta_x M_r \end{cases} \tag{10}$$

Ecuaţiile de mişcare în coordonate legate de arbore (10) şi funcţiile de comandă (11) vor fi rescrise utilizînd următoarele definiţii :

— axele triedrului $Oxyz$ vor fi considerate Ox axă reală, iar Oy axă imaginară în scopul unificării relaţiilor.

— notăm cu $\theta_{xy} = \theta_x + i\theta_y$ componenta mişcării reciproce care corespunde comportării identice a rotorului după cele două axe

— notăm cu $\overline{\theta}_{xy} = \theta_x - i\theta_y$ componenta mişcării nereciproce a rotorului care corespunde unei comportări diferite a rotorului după cele două axe din cauza momentelor de inerţie şi a constantelor elastice diferite.

$$\begin{cases} G_x = M_x + M_{xi} - \dot{\omega}_x(A + A_i) - \dot{\omega}_y[(C - B + C_i - B_i)\Omega] \\ G_y = M_y - \omega_y B + \omega_x[(C - A)\Omega] \end{cases} \tag{11}$$

Conform consideraţiilor anterioare :

$$G_{xy} = M_{xy} + 1/2\,(\overline{M}_{xyi} + M_{xy}) - \dot{\omega}_{xy} 1/2(A + A_i + B) -$$

$$- \dot{\overline{\omega}}_{xy} 1/2\,(A + A_i - B) + j\omega_{xy} 1/2(ZC - A - B + C_i - B_i)\Omega +$$

$$+ j\,\overline{\omega}_{xy} 1/2\,(-A + B + B_i - C_i)\Omega \tag{12}$$

$$G_{xy} = \ddot{\theta}_{xy} 1/2(A + A_i + B) + \ddot{\overline{\theta}}_{xy} 1/2(A + A_i - B) + \dot{\theta}_{xy} Z +$$

$$+ \theta_{xy} 1/2[(2C - A - B + C_i - B_i)\Omega^2 + (K_x + K_y)] +$$

$$+ \overline{\theta}_{xy} 1/2[(A - B + C_i - B)\Omega^2 + (K_x - K_y)] + \overline{\theta}_{xy} 1/2[(A - B + C_i -$$

$$- B_i)\Omega^2 + (K_x - K_y)] - j\dot{\theta}_{xy}(C - B - A)\Omega - j\theta_{xy} M_r \tag{13}$$

VI. Ecuația de mișcare a giroscopului în coordonate legate de suport

Mișcarea de rotație a arborelui față de carcasă cu viteza unghiulară nu permite măsurători directe ale abaterilor unghiulare ale rotorului. Acestea se pot efectua doar față de suport, de asemenea față de suport se aplică eventualele cupluri externe. Relațiile între sistemele de coordonate sub formă complexă sînt :

$$\begin{cases} \theta_{xy} = \theta_{xy}\, e^{-j\Omega t} \\ \overline{\theta}_{xy} = \overline{\theta}_{xy}\, e^{j\Omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{xy} = (\dot{\theta}_{xy} - j\Omega\theta_{xy})e^{-j\Omega t} \\ \dot{\overline{\theta}}_{xy} = (\dot{\overline{\theta}}_{xy} + j\Omega\overline{\theta}_{xy})e^{j\Omega t} \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_{xy} = (\ddot{\theta}_{xy} - 2j\Omega\dot{\theta}_{xy} - \Omega^2\theta_{xy})e^{-j\Omega t} \\ \ddot{\overline{\theta}}_{xy} = (\ddot{\overline{\theta}}_{xy} + 2j\Omega\dot{\overline{\theta}}_{xy} - \Omega^2\overline{\theta}_{xy})e^{j\Omega t} \end{cases}$$

Semnificația mărimilor θ_{xy}, $\overline{\theta}_{xy}$, este următoarea : dacă considerăm sistemele de referință $Oxyz$ și $OXYZ$ în rotație relativă și considerăm înclinarea axei rotorului relativă la suport $\theta_{xy} = \theta_{xy}e^{j\Omega t}$ o mărime care variază lent în comparație cu Ωt, atunci se observă că $\overline{\theta}_{xy} = (\overline{\theta}_{xy}e^{j\Omega t})e^{-2j\Omega t}$ este o componentă rotativă a mișcării de pulsație 2Ω datorată anizotropiei rotorului și inelului. Convenim să le numim componenta de joasă, respectiv de înaltă frecvență a mișcării.

Înlocuind transformările (14) în (12) și (13) rezultă :

$$G_{xy} = e^{-j\Omega t}\left\{\ddot{\theta}_{xy}\frac{A + A_i + B}{2} + \dot{\theta}_{xy}[z - j\Omega(C + A_i)] + \right.$$

$$+ \theta_{xy}\left[\Omega^2\frac{C_i - B_i - A_i}{2} + \frac{K_x + K_y}{2} - j(M_r + \Omega Z)\right]\Big\} +$$

$$+ e^{j\Omega t}\left\{\ddot{\overline{\theta}}_{xy}\frac{A + A_i - B}{2} + \dot{\overline{\theta}}_{xy}[j\Omega(A + A_i - B)] + \right. \tag{15}$$

$$\left. + \theta_{xy}\left[\Omega^2\cdot\frac{C_i - B_i - A_i}{2} + \frac{K_x - K_y}{2}\right]\right\}$$

$$G_{xy} = e^{-j\Omega t}\left\{M_{xy} + 1/2M_{xyi} - \dot{\omega}_{xy}\frac{A + A_i + B}{2} + \omega_{xy}\left[j\Omega\left(C + A_i + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{C_i - B_i - A_i}{2}\right)\right]\right\} + e^{j\Omega t}\left\{1/2\overline{M}_{xyi} - \dot{\overline{\omega}}_{xy}\frac{A + A_i + B}{2} - \right.$$

$$\left. - \overline{\omega}_{xy}\left[j\Omega(A + A_i - B + \frac{C_i - B_i - A_i}{2}\right)\right]\right\}$$

VII. Funcțiile de transfer

Înmulțind ecuația de mișcare în coordonate legate de carcasă cu $e^{j\Omega t}$ și aplicînd transformata Laplace funcțiilor complexe de argument real (15), cu observația $L[e^{2j\Omega t}\theta(t)] = \theta(s - 2j\Omega)$ se obține:

$$\tau_1(s)\theta_{xy}(s) + \tau_2(s)\overline{\theta}_{xy}(s - 2j\Omega) = Mx(s) + 1/2\overline{M}_{xyi}(s - 2j\Omega) - F_1(s)\omega_{xy}(s) - F_2(s)\overline{\omega}_{xy}(s - 2j\Omega)$$

Analog pentru relația conjugată în care se înlocuiește „s" cu $(s - 2j\Omega)$ se obține:

$$\tau_4(s)\overline{\theta}_{xy}(s - 2j\Omega) + \tau_3(s)\theta_{xy}(s) = M_{xy}(s - 2j\Omega) + 1/2\overline{M}_{xyi}(s - 2j\Omega) + 1/2M_{xyi}(s) - F_4(s)\overline{\omega}_{xy}(s - 2j\Omega) - F_3(s)\omega_{xy}(s)$$

În relațiile (16) și (17) au apărut funcțiile $\tau_1(s)$, $\tau_2(s)$, $\tau_3(s)$. $F_1(s)$, $F_2(s)$, $F_3(s)$, $F_4(s)$ care, dacă se neglijează termenii de amortizare, se pot scrie:

$$\tau_1(s) = 1/2\, s^2(A + A_i + B) - sj\Omega(C + A_i) + 1/2[\Omega^2(C_i - B_i - A_i) + K_x + K_y]$$

$$\tau_2(s) = 1/2\, s^2(A + A_i - B) - sj\Omega(A + A_i - B) + 1/2[\Omega^2(C_i - B_i - A_i) + K_x + K_y]$$

$$\tau_3(s) = \overline{\tau}_2(s - 2j\Omega)$$

$$\tau_4(s) = \overline{\tau}_1(s - 2j\Omega) = \tau_1(s) - 2j\Omega(A + B - C)(s - j\Omega) =$$
$$= 1/2\, s^2(A + A_i + B) - s2j\Omega[(A + B - C) + 1/2(C + A_i)] + 1/2(K_x + K_y) - 2\Omega^2(A + B - C) + 1/2\Omega^2(C_i - B_i - A_i)$$

$$F_1(s) = 1/2\,(A + A_i + B)\, s - j\Omega[(C + A_i) + 1/2\,(C_i - A_i - B_i)]$$

$$F_2(s) = 1/2(A + A_i - B)s + 1/2\, j\Omega(C_i - A_i - B_i)$$

$$F_3(s) = \overline{F}_2(s - 2j\Omega) = F_2(s) - j\Omega(A + A_i - B) = 1/2\,(A + A_i - B)s + 1/2j\Omega[(C_i - A_i - B_i) - 2(A + A_i - B)]$$

$$F_4(s) = \overline{F}_1(s - 2j\Omega) = F_1(s) - j\Omega(A + A_i + B) =$$
$$= 1/2(A + A_i + B)\, s - j\Omega[(C + A_i) + (A + A_i + B) + 1/2(C_i - A_i - B_i)]$$

Grupînd sub formă matricială relaţiile (16), (17) se poate scrie utilizînd produsul de matrici :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & \tau_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xy}(s) \\ \theta_{xy}(s - 2j\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xy}(s) \\ M_{xy}(s - 2j\Omega \end{bmatrix} + \tag{20}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xyi}(s) \\ M_{xyi}(s - 2j\Omega) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{xy}(s) \\ \omega_{xy}(s - 2j\Omega) \end{bmatrix}$$

sau restrîns :

$$\tau\theta = I \cdot M + 1/2\, EM_i - F \cdot \omega \tag{21}$$

unde τ, θ, I, M, E, M_i, F, ω sînt matricile definite în relaţia (20). Deplasarea unghiulară θ a rotorului faţă de suport este o mărime direct măsurabilă la care concură cele două mişcări :

— mişcarea de joasă frecvenţă cu componenta $\theta_{xy}(s)$

— mişcarea de înaltă frecvenţă cu componenta $\overline{\theta}_{xy}(s)$ şi amplitudinea oscilaţiei $\overline{\theta}_{xy}(s - 2j\Omega)$.

Ambele mişcări sînt excitate simultan de perturbaţii de joasă sau înaltă frecvenţă, viteze unghiulare şi cupluri aplicate inelului sau rotorului.

Soluţionînd ecuaţia (21) după θ rezultă :

$$\theta = \tau^{-1}(M + 1/2\, EM_i - F\omega)$$

$$\tau^{-1} = \frac{1}{\Delta_\tau} \begin{bmatrix} \tau_4 & -\tau_2 \\ -\tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix} \quad \text{cu } \Delta_\tau = \tau_1\tau_4 - \tau_2^2 \tag{22}$$

Cele două mişcări există în general simultan şi au patru aceleaş moduri date de rădăcinile ecuaţiei $\Delta_\tau = 0$ .Separarea şi deosebirile de mod între mişcării pentru diverse excitaţii reprezintă cazuri particulare care pot fi obţinute prin alocarea polilor funcţiilor $\tau(s)$ şi $F(s)$. Relaţiile între momentele de inerţie, coeficienţii de elasticitate şi turaţie pentru care se obţin anumite separări între cauze şi efecte, respectiv moduri particulare, reprezintă condiţia de acord pentru situaţia respectivă.

VIII. Condiţiile necesare pentru o comportare identică cu a unui giroscop suspendat liber într-un punct

Această comportare rezultă din următoarele condiţii :

1. Separarea mişcărilor la excitaţii de tip cuplu pe rotor şi viteză unghiulară a carcasei : matricile τ şi F trebuie să fie diagonale deci

$$\tau_2 = 0\,;\ F_2 = 0\,;\ F_3 = 0\,;\ A + A_i = B\,;\ A_i + B_i = C_i\,;\ K_x = K_y \tag{23}$$

De aici rezultă :

$$\theta_{xy}(s) = \frac{M_{xy}(s) - F_1\omega_{xy}(s)}{\tau_1(s)} \tag{24}$$

2. Proprietatea de precesie necesită ca funcția de transfer să aibă un caracter integrator deci $\tau_1 = 0$- ceea ce implică

$$K_x + K_y = 0 \tag{25}$$

Condițiile 1 și 2 nu pot fi satisfăcute simultan decît pentru $K_x = K_y = 0$. Acest caz reprezintă giroscopul cu articulație cardanică în rotație, fără restricții elastice, ieșind din cadrul giroscoapelor cu suspensie elastică.

IX. Condițiile pentru comportarea de joasă frecvență identică cu a unui giroscop suspendat liber

Se ignoră faptul că există mișcare de înaltă frecvență cu componentă medie nulă. Nu se aplică cupluri pe inel; nu se aplică cupluri și viteze unghiulare de înaltă frecvență. Proprietatea de precesie necesitînd o comportare integratoare rezultă:

$$\tau_1(0)\tau_4(0) - \tau_2^2(0) = 0$$

respectiv:

$$[\Omega^2(C_i - B_i - A_i) + (K_x + K_y)][\Omega^2(C_i - B_i - A_i) +$$

$$4\Omega^2(C - A - B) + (K_x + K_y)] - [\Omega^2(C_i - B_i - A_i) + \tag{26}$$

$$(K_x - K_y)^2 = 0$$

În cazul unei construcții normale se poate utiliza o ipoteză simplificatoare deoarece:

$$A, B, C \gg A_i,\ B_i, C_i,\ \frac{K_x}{\Omega^2},\ \frac{K_y}{\Omega^2} \tag{27}$$

Relația poate fi aproximată cu:

$$\Omega^2(C - A - B)[\Omega^2(C - A - B) + (K_x + K_y)] = 0 \tag{28}$$

Soluția $C - A - B = 0$ contrazice ipoteza simplificatoare, deci nu este valabilă.

Rezultă condiția de acord a giroscopului:

$$\Omega^2 = \frac{K_x + K_y}{A_i + B_i - C_i} \tag{29}$$

X. Condițiile pentru ca amplitudinea mișcării de înaltă frecvență să se comporte similar cu mișcarea de precesie a unui giroscop suspendat liber

În cazul aplicației giroscopului ca traductor de viteză unghiulară servoasistat se constată că se exercită atît mișcarea de joasă cît și cea de înaltă frecvență, ca urmare a unei viteze unghiulare a suportului. Servo-

asistarea constă în aplicarea unui cuplu controlat cu ajutorul unui motor pînă la anularea mișcării de joasă frecvență. Este însă posibilă ignorarea mișcării lente și servoasistarea după cea de înaltă frecvență. Condițiile de realizare ale unui girometru în această situație sînt următoarele :

I. separarea mișcărilor de excitație cuplu pe rotor ; deci matricea τ să fie diagonală. Rezultă $\tau_2 = 0$ și condiția I de acord :

$$A + A_i = B\,;\ \Omega^2 = \frac{K_x - K_y}{A_i + B_i - C_i} \tag{30}$$

II. proprietatea de precesie : funcția de transfer pentru mișcarea de înaltă frecvență să aibă o comportare integratoare :

$$\overline{\theta}(s - 2j\Omega) = \frac{\overline{M}_{xy}(s - 2j\Omega)}{\tau_4(s)} - \frac{F_3(s)\omega_{xy}(s)}{\tau_4(s)} \tag{31}$$

deci $\tau_4(0) = 0$ conduce la condiția II de acord :

$$\Omega^2 = \frac{K_x + K_y}{A_i + B_i - C_i + 4(A + B - C)} \tag{32}$$

În acest caz condițiile I și II de acord nu mai vin în contradicție și pot fi satisfăcute simultan conducînd la :

$$2\Omega^2(A + B - C) = K_y \tag{33}$$

și funcția de transfer care definește sensibilitatea la viteză unghiulară de joasă frecvență și cuplu de reacție de înaltă frecvență este :

$$\theta(s - 2\,j\Omega) = \frac{\Omega\overline{M}_{xy}(s - 2\,j\Omega) - 1/2\,j(K_x - K_y)\omega_{xy}(s)F_3(s)}{\{s\Omega B - j[K_y + \Omega^2(A_i + C)]\}\,s} \tag{34}$$

În condițiile specifice de acord Δ_τ devine :

$$\Delta_\tau^A = \tau_1^A(s)\ \ \tau_4^A(s) - \tau_2^A(s) \tag{35}$$

Relațiile matriciale (22) definesc modurile de mișcare liberă ca rădăcini ale ecuației

$$\Delta_\tau^A = 0 \tag{36}$$

Utilizînd notația :

$$\gamma = 1 + \frac{A + B - C}{(A + A_i)B}\,[(A + B - C) + A + A_i + B]$$

rezultă

$$\Delta_\tau^A = (A + A_i)B_s(s - 2\,j\Omega)[s - j\Omega(1 + \sqrt{\gamma})][s - j\Omega(1 - \sqrt{\gamma}] \tag{37}$$

Modurile de mișcare cu pulsație 0 și 2Ω sînt impuse prin condițiile de acord. Celelalte două moduri, simetrice față de Ω pot fi determinate prin alegerea momentelor de inerție, în cazul particular putînd fi suprapuse peste celelalte $\gamma = 1$ sau între ele $\gamma = 0$. (Fig. 2).

În continuare se vor evita cazurile particulare și se va presupune că există o bună separare a modurilor : de exemplu pentru $\gamma \cong 0{,}1$ modurile rezultă 0 ; 0,7 Ω ; 1,3 Ω ; 2Ω.

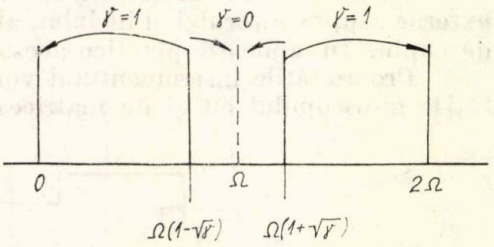


Fig. 2 — Modurile caracteristice ale mișcării libere.

XI. Utilizarea giroscopului acordat în sistemele de navigație

Unghiurile mici, max. 1° pe care le pot lua abaterile unghiulare ale rotorului limitează aria de aplicație a giroscopului cu suspensie elastică la două utilizări majore :

a) ca giroscop liber, detector de nul, biaxial pentru platforme stabilizate.

b) ca girometru servoasistat prin cuplu, cu două axe de sensibilitate pentru platforme sau legate de vehicul.

În ambele cazuri giroscopul lucrează în buclă închisă de reglaj și trebuie prevăzut cu două traductoare de deplasare unghiulară și două motoare de cuplu pentru corecție în cazul a) sau servoasistare în cazul b). Banda de trecere a acestor dispozitive se limitează după caz la banda de joase, respectiv înalte frecvențe a mișcărilor rotorului sau în cazul măsurării vitezelor și accelerațiilor acoperă ambele benzi de frecvență.

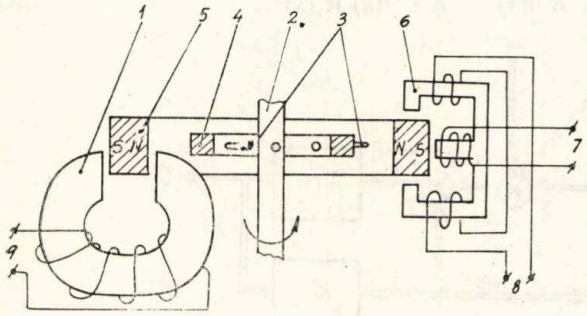


Fig. 3 — Giroscop suspendat elastic cu traductor de deplasasr și motor de cuplu.

Traductorul de deplasare (6) este excitat cu o tensiune alternativă (7) de frecvență mult mai mare decît frecvența maximă a benzii de trecere. El furnizează un semnal (8) de amplitudine și fază proporționale cu deviația rotorului (5). Acesta este magnetizat permanent, fiind astfel sensibil la cîmpul magnetic al motorului de cuplu (1), alimentat(9)de la un amplificator după prelucrarea semnalului de la traductor. Pe o axă perpendiculară a instrumentului există încă un motor și un traductor similar (fig. 3).

În cazul general semnalul transmis de traductorii de deplasare este filtrat separîndu-se componenta de joasă frecvență (F.T.J.) de cea de înaltă frecvență (F.T.S). Matricea de amplificare (K) alimentează motoarele de cuplu cu curenți stabilizați ca sume ponderate ale componentelor deplasării.

Acești curenți, proporționali cu cuplurile de reacție, constituie și semnalele de ieșire ale traductorului giroscopic (fig. 4).

Mărimile fizice care excită sistemul sînt viteze unghiulare și cupluri externe asupra rotorului și inelului, altele decît cele aplicate de motoarele de cuplu. În aplicații practice aceste mărimi sînt de frecvență joasă.

Proprietățile instrumentului vor fi determinate atît de particularitățile giroscopului cît și de matricea de reglaj.

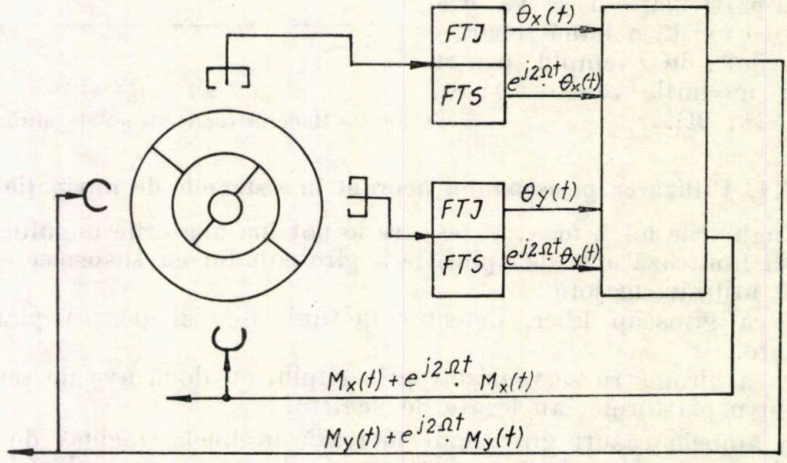


Fig. 4 — Schema electrocinematică a traductorului giroscopic cu buclă de reacție

XII. Studiul buclei de reglaj

Sistemul în buclă deschisă cu traductor și amplificator după relația :

$$X(s) = K\theta(s) = K\tau^{-1}(s)M_\varepsilon(s) \tag{39}$$

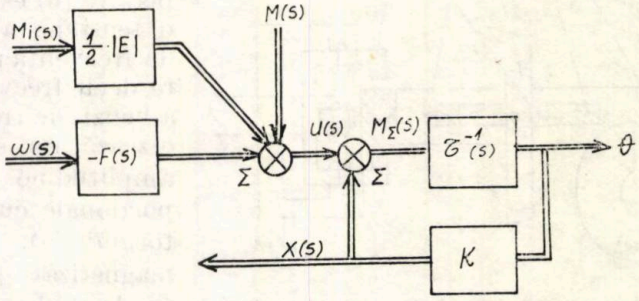


Fig. 5 — Schema bloc a sistemului de reglaj.

unde K este matricea de reglaj și $X(s)$ mărimea de ieșire.

Pentru o interpretare simplă din punct de vedere tehnologic a mărimilor de ieșire, fără să fie necesare o separare care se obține prin diagonalizarea matricii de transfer.

$$K\tau^{-1}(s) = \frac{1}{\Delta_\tau}\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau_4 & -\tau_2 \\ -\tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_\tau}\begin{bmatrix} \tau_4K_1 - \tau_2K_2 - \tau_2K_1 + \tau_4K_2 \\ \tau_4K_3 - \tau_2K_4 - \tau_2K_3 + \tau_2K_4 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Se disting două situații posibile :

a) $-\tau_2 K_1 + \tau_1 K_2 = 0$; $\quad \tau_4 K_3 - \tau_2 K_4 = 0$

b) $\tau_4 K_1 - \tau_2 K_2 = 0$; $\quad -\tau_2 K_3 + \tau_1 K_4 = 0$

Cazul a) conduce la obținerea unor bucle de reglaj distincte pentru mișcările de înaltă și joasă frecvență obținîndu-se o structură în care se pot încadra exemplele de la punctele 9 și 10.

Pentru a măsura viteza unghiulară și accelerația lineară este necesară cuplarea buclei de reglaj conform cazului b). În situații practice obținerea unor factori de amplificare care să realizeze precis și stabil ecuațiile respective este o soluție complexă. Se poate alege soluția simplă :

$$K_1 = K_4 = 0 \quad \tau_2(0) = 0$$

separarea obținîndu-se numai în regim stabilizat.

Se ajunge la condiția de acord :

$$\Omega^2(C_i - B_i - A_i) + K_x - K_y = 0 \tag{41}$$

În cazul simetriei momentelor de inerție $A + A_i = B$.

Separarea se obține și în regim tranzitoriu.

XIII. Condiții de acord și funcții de transfer

Funcționarea în buclă închisă este descrisă de :

$$[I - K\tau^{-1}(s)]X(s) = K\tau^{-1}(s) \cdot U(s) \tag{42}$$

respectiv

$$[\Delta_\tau I - K\tau^*(s)]X(s) = K\tau^*(s)U(s) \tag{43}$$

unde prin $\tau^*(s)$ s-a notat matricea cofactor a matricii $\tau(s)$ și prin $U(s)$ cuplul de excitație generalizat. Pentru a obține un instrument de măsură fără eroare statică, cuplul de reacție trebuie să compenseze în timp cuplul perturbator. Deci :

$$\lim_{t\to\infty} [X(t) + U(t)] = 0$$

respectivi

$$\lim_{s\to 0} X(s) = -\lim_{s\to 0} U(s)$$

De aici rezultă :

$$\lim_{s\to 0} (\Delta_\tau I - \tau^*(s)K) = -\lim_{s\to 0} K\tau^*(s) \tag{44}$$

și condiția

$$\lim_{s\to 0} \Delta_\tau = 0 \text{ sau } \lim_{s\to 0} [\tau_1(s)\tau_4(s) - \tau_2^2(s)] = 0 \tag{45}$$

care pote fi satisfăcută ținînd cont de condiția I de acord

$$\tau_4(0) = 0$$

$$1/2(K_x + K_y) - 2\Omega^2(A + B - C) + 1/2\Omega(C_i - B_i - A_i) = 0 \quad (46$$

În aceste condiții particulare funcțiile de transfer devin :

$$\begin{cases} \tau_1^A(s) = 1/2(s - 2j\Omega)[(A[s(A + A_i + B) + 2j\Omega(A + B - C)] \\ \tau_2^A(s) = 1/2(s - 2j\Omega)(A + A_i - B) \\ \tau_4^A(s) = 1/2[s(A + A_i + B) - 2j\Omega(A + B - C + A + A_i + B) \end{cases} \quad (47$$

Rezolvînd în X ecuația matricială (42) se obține :

$$X(s) = \frac{1}{\Delta_\tau + \tau_2(K_2 + K_3) - K_2K_3} \begin{bmatrix} -\tau_2K_1 + K_2K_3 & \tau_1K_2 \\ \tau_4K_3 & K_2K_3 - \tau_2K_3 \end{bmatrix} U(s) \quad (48$$

Cele patru funcții de transfer scalare sînt :

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_2(E_3 - \tau_2)}{\Delta_\tau + \tau_2(K_2 + K_3) - K_2K_3}; \frac{\overline{X}(s - 2j\Omega)}{U(s)} =$$

$$= \frac{\tau_4K_3}{\Delta_\tau + \tau_2(K_2 + K_3) - K_2K_3} \quad (49$$

$$\frac{X(s)}{\overline{U}(s - 2j\Omega)} = \frac{\tau_1K_2}{\Delta_\tau + \tau_2(K_2 + K_3) - K_2K_3}; \frac{\overline{X}(2 - 2j\Omega)}{\overline{U}(s - s - 2j\Omega)} =$$

$$= \frac{K_3(K_2 - \tau_2)}{\Delta_\tau + \tau_2(K_2 + K_3) - K_2K_3}$$

Corectitudinea conversiei cuplului de excitație generalizat $U(s$ în mărime de ieșire $X(s)$ în regim stabilizat poate fi verificată printr-o trecere la limită :

$$\lim_{s\to 0} \frac{X(s)}{U(s)} = -1$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{X(s)}{\overline{U}(s) - 2j\Omega)} = -\frac{\tau_1(0)}{K_3} = \frac{2\Omega^2(A + B - C)}{K_3}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{\overline{X}(s - 2j\Omega)}{U(s)} = 0 \quad (50$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{\overline{X}(s - 2j\Omega)}{\overline{U}(s - 2j\Omega)} = -1$$

Neglijînd regimul tranzitoriu, care poate fi foarte scurt, printr-o locare corespunzătoare de moduri la giroscopul liber și prin determinarea oeficienților, în regim stabilizat rezultă:

$$X(s) = -U(s) + \frac{2\Omega^2(A + B - C)}{K_3}\,\overline{U}(s - 2j\Omega)$$
$$\overline{X}(s - 2j\Omega) = -\overline{U}(s - 2j\Omega) \tag{51}$$

au

$$X(s) = \begin{bmatrix} -1 & \varepsilon \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U(s) = G \cdot U(s) \tag{52}$$

nde $\varepsilon = \dfrac{2\Omega^2}{K_3}\,(A + B + C)$ poate fi considerată o eroare statică unoscută.

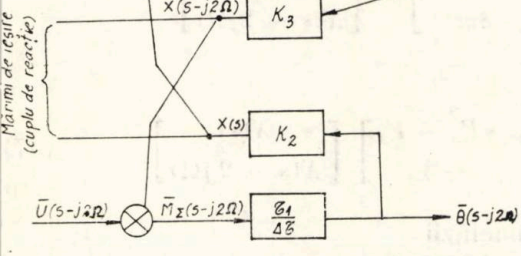


Fig. 6 — Schema buclei de reglaj scalare.

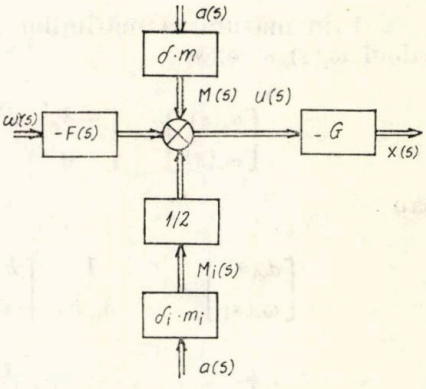


Fig. 7 — Schema completului de măsură.

XIV. Măsurarea vitezei unghiulare și a accelerației lineare

Considerînd giroscopul servoasistat în buclă indusă ca o entitate descrisă de (52) rezultă schema întregului complet de măsură.

$$U(s) = M(s) + 1/2\,M_i(s) - F(s)\omega(s)$$
$$U(s) = (\delta \cdot m + 1/2\delta_i - m_i)\,a(s) - F(s) \cdot \omega(s) \tag{53}$$

$$X(s) = (\delta m + 1/2\delta_i m_i)F(s) \cdot a(s) = G(s)F(s)\omega(s) \tag{54}$$

În relațiile (53), (54) mărimile $U(s)$, $M(s)$, $F(s)$, $\omega(s)$, $a(s)$ sînt matriciale.

Se constată că pentru a obține sensibilitate la accelerații este necesar să existe δ sau δ_i nenuli.

Presupunînd $\delta_i = 0$ și excitații lente se pune problema separării măsurătorilor

$$a(s) = \begin{bmatrix} a(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \omega(s) = \begin{bmatrix} \omega(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

deoarece nu există $\overline{a}(s - 2j\Omega)$ și $\overline{\omega}(s - 2j\Omega)$

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \overline{X}(s - 2j\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \varepsilon \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(s) \\ 0 \end{bmatrix} \delta_m - \begin{bmatrix} -1 & \varepsilon \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(s) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \overline{X}(s - 2j\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_m & F_1 - \varepsilon F_3 \\ 0 & F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(s) \\ \omega(s) \end{bmatrix}$$

de unde putem scrie pe componente :

$$\begin{aligned} X(s) &= -\delta_m a(s) + (F_1 - \varepsilon F_3)\omega(s) \\ \overline{X}(s - 2j\Omega) &= F_3\omega(s) \end{aligned} \tag{56}$$

Prin măsurarea mărimilor $X(s)$, $\overline{X}(s - 2j\Omega)$ se pot determina prin calcul $\omega_c(s)$ și $a_c(s)$

$$\begin{bmatrix} a_c(s) \\ \omega_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_m & F_1 - \varepsilon F_3 \\ 0 & -\delta m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X(s) \\ \overline{X}(s - 2j\Omega) \end{bmatrix}$$

sau

$$\begin{bmatrix} a_c(s) \\ \omega_c(s) \end{bmatrix} = -\frac{1}{\delta_m F_3} \begin{bmatrix} F_3 & \varepsilon F_3 - F_1 \\ 0 & -\delta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ \overline{X}(s - 2j\Omega) \end{bmatrix} \tag{57}$$

Concluzii

Viteza unghiulară produce răspunsuri atît de joasă și cît și de înaltă frecvență. Relația între răspunsurile de înaltă frecvență și această excitație depinde de F_3 deci precizia măsurării vitezei unghiulare depinde de instabilitatea vitezei de spin, problemă tipică oricărui giroscop.

Relația de calcul este :

$$\omega_c(s) = \frac{1}{F_3} \overline{X}(s - 2j\Omega)$$

Accelerația lineară produce un răspuns de joasă frecvență. Relația de calcul este :

$$a_c(s) = -\frac{1}{\delta_m} X(s) - \frac{\varepsilon}{\delta_m} \overline{X}(s - 2j\Omega) + \frac{F_1}{\delta_m F_3} \overline{X}(s - 2j\Omega)$$

Și este mai puțin exactă depinzînd prin F_1 și F_3 de viteza de spin, de δ care este influențat datorită rigidității limitate a suspensiei, și de ε în care intervine instabilitatea sistemului electronic de reglaj.

Această împerechere de proprietăți face interesantă aplicarea acestui dispozitiv în domeniul sistemelor de navigație inerțială, altele decît cele cosmice.

BIBLIOGRAFIE

1. *J. C. Radix*, Gyroscopes et gyrometres, Edition Cepadues, 1978
2. *H. F. Erdley*, Vibro-Rotor Gyroscopes.
3. *J. S. Lipman*, U.S. Patent 1969 : 3463016, 3678764, 3974701
4. *S. Shapiro*, 3974701
5. *C. S. Edwards*, The story of Strapdown Inertial Systems British Aerospace Public Ltd. Company-Dynamics Group.
6. *R. J. Craig*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems May 1972
7. *R. J. Craig*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems May 1972
8. *T. J., Ryan*, Journal of Guidance Control and Dynamics Ian-Febr., 1984

The Dry-Tunned Gyro in Strap Down Navigation Systems

This paper presents the model of the dry-tuned gyro described by dynamic equations of motion in case-fixed or shaft coordinate frames.

The tunning conditions and the input-output model as a measuring instrument are analysed.

A direct application of study is the operation of dry tuned gyro/accelerometer (DTAG) in strap down navigation systems.

C.Z.: 629.7

LIMITAREA DOMENIULUI DE FUNCȚIONARE A REȚELELOR DE PALETE DECELERATOARE

V. STANCIU *

În lucrarea de față sînt prezentate posibilitățile maxime de încărcare a rețelelor deceleratoare pe baza criteriilor gazodinamice.

Pe baza limitărilor impuse rețelei și accelerației de frînare a fluidului de lucru, s-a stabilit domeniul maxim de funcționare a rețelelor de compresor care a fost reprezentat pe diagrama universală a vitezelor rețelelor de palete.

Introducere

Utilizarea pe scară tot mai largă a compresoarelor axiale subsonice atît în construcția sistemelor de propulsie aerospațiale cît și în construcția instalațiilor terestre impune cu necesitate stabilirea domeniului de funcționare al acestora, prin precizarea limitelor gazodinamice.

În lucrarea [1] au fost prezentate limitele mecanice de încărcare a rețelelor deceleratoare evidențiindu-se rolul primordial al turației respectiv al vitezelor de transport.

În prezentul studiu se aduc completări la determinarea posibilităților maxime de încărcare a rețelelor deceleratoare pe baza criteriilor gazodinamice.

Se scot în evidență cîteva limite gazodinamice în funcționarea rețelelor mobile sau fixe, ce compun compresorul axial, care permit precizarea domeniului real de funcționare a rețelelor deceleratoare în general.

Pentru a da un caracter universal concluziilor ce decurg din acest studiu se apelează la diagrama universală a vitezelor rețelelor de palete deceleratoare.

1. Diagrama universală a vitezelor rețelelor de palete deceleratoare

O importanță deosebită în studiul proceselor de curgere într-un compresor axial prezintă diagrama evolutivă a fluidului de lucru.

Această diagramă este rezultatul suprapunerii diagramelor complete ale vitezelor treptelor componente.

La baza construcției acestor diagrame stă triunghiul local al vitezelor obținut prin compunerea vectorială a vitezelor absolută ($\vec{V}$) transport ($\vec{U}$) și relativă ($\vec{W}$), figura 1.

* Șef lucrări dr. ing., catedra Aeronave

Pentru generalizare se vor nota cu indicii "1" "2" parametrii cinematici ai fluidului în secțiunea de intrare respectiv de ieșire din rețeaua mobilă (fixă) a treptei.

În aceste condiții se poate reprezenta diagrama completă a vitezelor fluidului care traversează rețeaua figura 2.

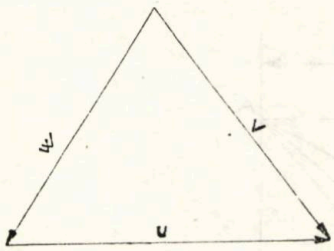


Fig. 1 — Triunghiul local al vitezelor fluidului de lucru.

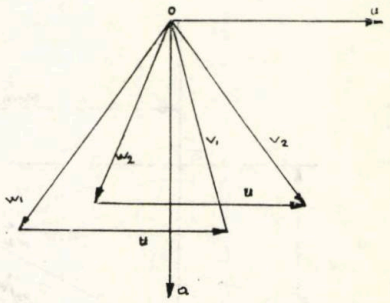


Fig. 2 — Diagrama completă a vitezelor unei rețele mobile deceleratoare în cazul variației vitezei axiale.

Dintre toate soluțiile posibile se admite în continuare, aceea în care viteza axială se menține constantă. Dacă se ia ca viteză de referință, viteza tangențială U, diagramele complete devin patrulatere, în particular trapeze, ca în figura 3.

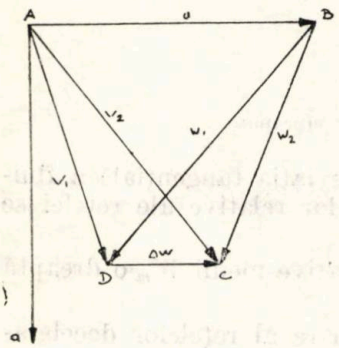


Fig. 3 — Diagrama completă a vitezelor unei rețele mobile deceleratoare cu viteza axială constantă. raportată la viteza tangențială.

Construcțiile actuale de sisteme de propulsie,în componența cărora grupul turbocompresor este indispensabil, au impus profilarea cilindrică sau ușor conică a exteriorului organelor componente ale sistemului.

Rezultatul a avut implicații imediate asupra proceselor de lucru prin turbină și compresor.

Astfel în condițiile unei funcționări stabile a grupului turbocompresor, viteza de transport, limitată numai din considerente mecanice, nu are variații esențiale. Pe baza acestei observații se poate concluziona că viteza tangențială U, nu este un element de diferențiere funcțională între rețelele mobile deceleratoare, chiar dacă rolul acesteia în preluarea energiei mecanice este incontestabil.

Se va considera sensul vitezei tangențiale, sens pozitiv de referință al componentelor celorlalte viteze.

Pe direcția ortogonală celei tangențiale se va lua ca sens pozitiv, sensul de deplasare a fluidului de lucru.

Avînd în vedere că lucrul mecanic transmis de rotor fluidului, conform ecuației lui Euler, este :

$$l^* = U \cdot \Delta W_u \tag{1}$$

în care ΔW_u este deviația fluidului în mișcare relativă ; pe direcția lui U, se poate constata că ceea ce deosebește esențial două rețele mobile este mărimea deviației, ΔW_u.

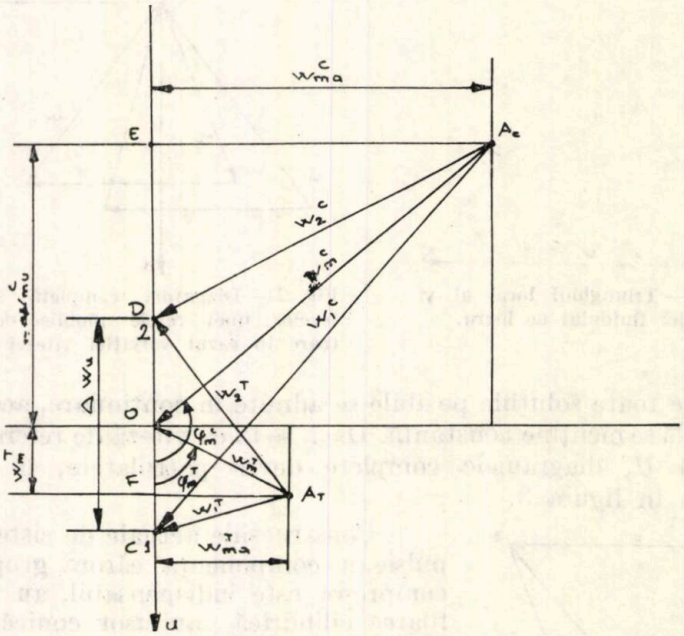


Fig. 4 — Diagramele vitezelor relative suprapuse

Dacă se admite că viteza de referință deviația tangențială a fluidului și se suprapun numai diagramele vitezelor relative ale rețelei se obține imaginea din figura 4.

Se construiește prin vîrful 0 al vitezei relative medii W_m o dreaptă paralelă cu direcția axială.

Rezultă că domeniul teoretic de funcționare al rețelelor deceleratoare este situat deasupra dreptei dusă prin 0 (vezi figura 4).

Prin urmare orice rețea deceleratoare se poate reprezenta în domeniul stabilit printr-un punct M de coordonate W_{ma}, W_{mu}, cartezian sau W_m, β_m, polare.

În condițiile în care se admite $\Delta W_u = 1$ rezultă :

$$\begin{cases} W_{ma} = \dfrac{\overline{W}_{ma}}{\bar{l}^*} & (2) \\ \\ W_{mu} = \dfrac{\rho}{\bar{l}^*} & (3) \end{cases}$$

unde $\bar{W}_{ma} = \frac{W_{ma}}{u}$, reprezintă coeficientul de debit, şi $\bar{l}^* = \frac{l^*}{u^2}$, reprezintă coeficientul de sarcină al reţelei şi ρ, gradul de reacţiune al reţelei.

Domeniul de funcţionare al reţelei poate fi reprezentat în coordonate :

$$\tilde{W}_a = \frac{\bar{W}_a}{\bar{l}^*}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\bar{l}^*}.$$

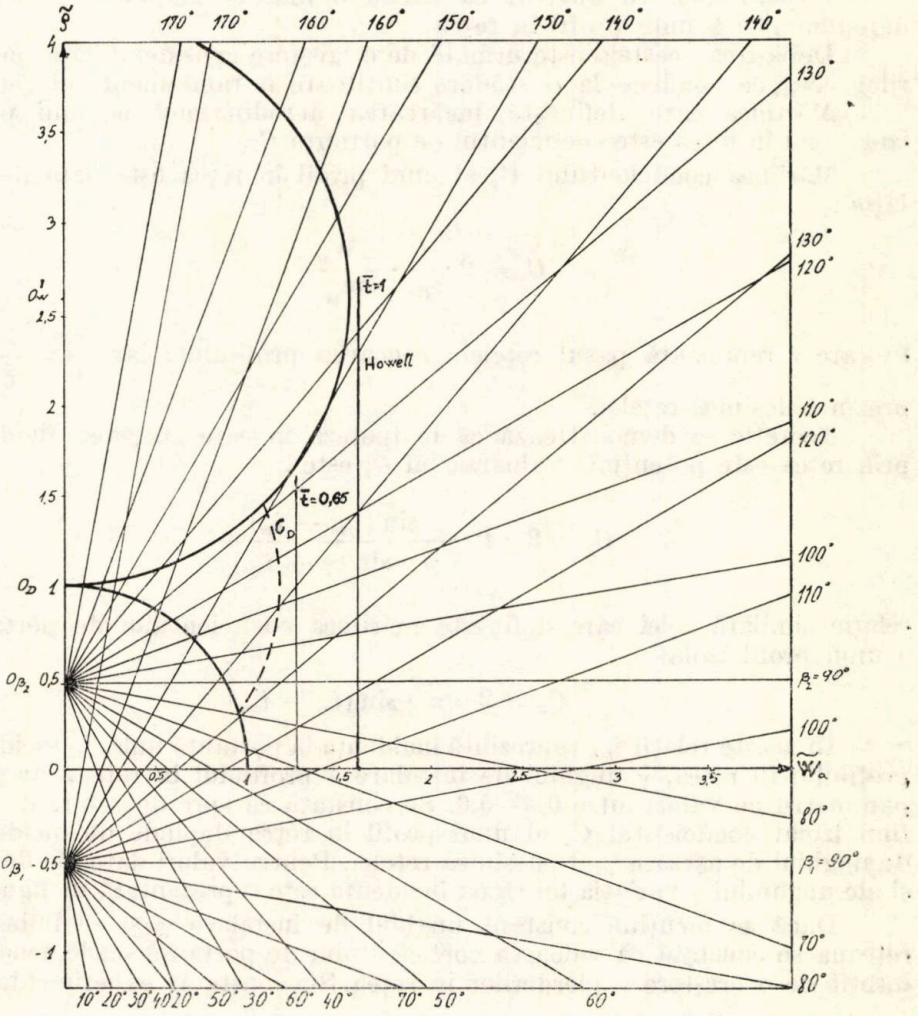


Fig. 5 — Diagrama universală a vitezelor reţelelor de palete deceleratoare.

Acest domeniu este străbătut de fasciculele de drepte D_{β_1}, D_{β_2} care pornesc din punctele $O_{\beta_1}(0\,;\ -0{,}5)$ şi respectiv $O_{\beta_2}(0\,;\ 0{,}5)$.

Diagrama astfel obţinută, a fost reprezentată în fig. nr. 5 şi reprezintă diagrama universală a vitezelor reţelelor de palete deceleratoare.

Utilizarea acestei diagrame, presupune reprezentarea domeniului real de funcţionare a reţelelor stabilit şi verificat pe cale experimentală.

Este deci necesar să se precizeze limitele în funcţionare a reţelelor deceleratoare. Între acestea un rol deosebit îl au limitările impuse de desprinderile stratului limită în reţelele deceleratoare.

2. Limitarea desimii reţelei deceleratoare

Experienţele au dovedit că există o limită maximă a încărcării aerodinamice a unui profil în reţea.

Depăşirea acesteia este urmată de o creştere considerabilă a pierderilor ceea ce conduce la o scădere simţitoare a randamentului reţelei.

Mărimea care defineşte încărcarea aerodinamică a unui profil izolat sau în reţea este coeficientul de portanţă C_z.

Mărimea coeficientului C_z al unui profil în reţea este dată de relaţia :

$$C_z = 2 \cdot \frac{t}{c} \cdot \frac{\Delta W_u}{W_m} \tag{4}$$

în care t reprezintă pasul reţelei ; c coarda profilului ; iar $\frac{c}{t} = \frac{1}{\bar{t}}$ reprezintă desimea reţelei.

Teoretic se demonstrează că în ipoteza în care curgerea fluidului prin reţea este potenţială valoarea lui C_z este :

$$C_z = 2 \cdot \bar{t} \cdot \frac{\sin (i_{mo} - i_m)}{p \cdot \sin (\gamma + i_{mo})} \tag{5}$$

relaţie similară celei care defineşte mărimea coeficientului de portanţă a unui profil izolat

$$C_z = 2 \cdot \pi \cdot \sin (i_m - i'_{mo}) \tag{6}$$

În aceste relaţii i_{mo} reprezintă incidenţa la portanţă nulă, i_m incidenţa profilului în reţea, γ unghiul de instalare a profilului în reţea, iar p un parametru cu valori între 0,5—0,6. Se constată că spre deosebire de profilul izolat coeficientul C_z al unui profil în reţea depinde de incidenţă, de unghiul de aşezare γ, de desimea reţelei. Pentru valori date ale desimii şi ale unghiului γ variaţia lui C_z cu incidenţa este reprezentată în figura 6.

Dacă se menţine constant unghiul de instalare γ şi se îndeseşte reţeaua se constată că valoarea coeficientului de portanţă scade, fenomen însoţit de o creştere a pierderilor în reţea. S-a constatat experimental că produsul $C_z \cdot \frac{c}{t}$ admite o valoare maximă egală cu 2, adică

$$C_z \cdot \frac{c}{t} \leqslant 2 \tag{7}$$

Această limită a fost stabilită de Keller.

Pe de altă parte, din analiza distribuţiilor presiunilor pe profilul în reţea, se constată că valoarea maximă a lui C_z ce se poate atinge este 1, dacă se admit pierderi în reţea în limite admisibile.

În foarte rare cazuri se poate realiza $C_z = 1{,}3$.

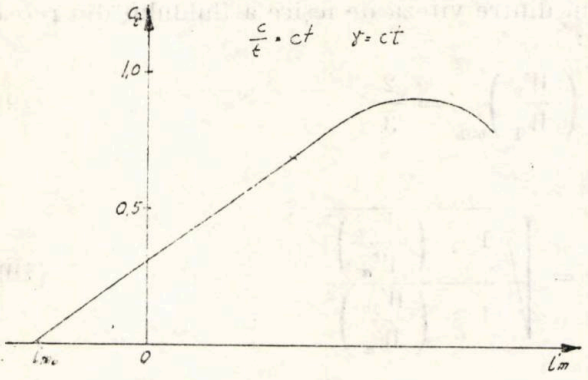


Fig. 6 — Variaţia coeficientului de portanţă în funcţie de incidenţă, în cazul unui profil în reţea.

În condiţiile lui Keller rezultă o valoare maximă a desimii reţelei $\left(\frac{c}{t}\right)_{max} = 1{,}54$ sau o valoare minimă a pasului relativ al reţelei:

$$\bar{t}_{min} = 0{,}65.$$

Prin urmare orice reţea va trebui să verifice această condiţie astfel ca pierderile să fie admisibile.

Ţinînd seama că

$$\frac{W_m}{\Delta W_u} = 2 \cdot \bar{t} \cdot \frac{1}{C_z}$$

în care $W_m = \sqrt{\tilde{\rho}^2 + \tilde{W}_a^2}$

rezultă:

$$\tilde{W}_a^2 + \tilde{\rho}^2 = \left(2 \cdot \bar{t} \cdot \frac{1}{C_z}\right)^2 \tag{8}$$

Deci în condiţiile în care $\frac{1}{C_z} \cdot \bar{t} = \text{const.}$ locul geometric al punctelor care verifică ecuaţia (8) este un cerc cu centrul în origine în diagrama universală.

Pentru $\left(\frac{1}{C_z} \cdot \bar{t}\right)_{min} < 0{,}5$ rezultă cercul de ecuaţie $\tilde{W}_a^2 + \tilde{\rho}^2 = 1$, ale cărui puncte interioare se exclud din domeniul de funcţionare a reţelelor deceleratoare (vezi figura 5).

3. Limitarea accelerației de frînare a fluidului în rețea

Experiențele au arătat că într-un canal divergent în condițiile unei curgeri subsonice, nu se pot realiza decelerări mari ale fluidului datorită pericolului desprinderii stratului limită.

Încercări pe rețele de palete de compresor au demonstrat că există o valoare minimă a raportului dintre viteza de ieșire a fluidului din rețea W_2 și viteza la intrare W_1:

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right)_{min} = \frac{2}{3} \tag{9}$$

Avînd în vedere că

$$\frac{W_2}{W_1} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{W_{2u}}{W_a}\right)^2}{1 + \left(\frac{W_{1u}}{W_a}\right)^2}} \tag{10}$$

unde

$$\begin{cases} W_{1u} = W_{mu} + \dfrac{\Delta W_u}{2} \\ W_{2u} = W_{mu} - \dfrac{\Delta W_u}{2} \end{cases} \tag{11}$$

rezultă în noile coordonate componentele tangențiale

$$\begin{cases} W_{1u} = W_a \cdot \dfrac{2\tilde{\rho} + 1}{2\tilde{W}_a} \\ W_{2u} = W_a \cdot \dfrac{2\tilde{\rho} - 1}{2\tilde{W}_a} \end{cases} \tag{11'}$$

adică relația (10) devine prin prelucrări succesive

$$\tilde{\rho}^2 + \tilde{W}_a^2 - \frac{1 + a^2}{1 - a^2} \cdot \tilde{\rho} + \frac{1}{4} = 0 \tag{10'}$$

În ecuația obținută s-a notat prin $a = \dfrac{W_2}{W_1}$, pentru generalizare.

Prin urmare condiția a = constant conduce în diagrama universală a vitezelor la un cerc cu centrul

$$O'_w\left(0, \frac{1 + a^2}{1 - a^2}\right) \text{ și raza } R'_w = \frac{2a^2}{1 - a^2}.$$

În cazul particular $a = 2/3$ rezultă și $R = 1{,}6$.

Este interesant să se precizeze faptul că cercul limită determinat anterior urmărește curba de pierderi de 2% stabilită experimental de Dzung și Seippel [2].

Deci din domeniul de funcționare ar trebui excluse punctele din interiorul cercului limită (vezi fig. 5).

4. Limitarea încărcării rețelei

Cercetări recente au impus ca factori de limitare a încărcării rețelei deceleratoare factorul de difuzie D. Acesta ține seama atît de frînarea fluidului în rețea cît și de deviația curentului ΔW_u precum și de desimea rețelei.

Relația care stabilește legătura dintre cei trei factori este:

$$D = 1 - \frac{W_2}{W_1} + \frac{\bar{t}}{2} \cdot \frac{\Delta W_u}{W_1} \tag{12}$$

Studiile experimentale au arătat că valoarea maximă ce poate fi atinsă de factorul de difuzie este 0,6. Peste această valoare au loc pierderi în rețea care depășesc limitele admise. Pentru siguranța în funcționarea rețelelor, la toate regimurile, se recomandă în proiectarea rețelelor de compresor următoarele limite:

a) $D \leqslant 0{,}5$, la baza rețelelor;

b. $D \leqslant 0{,}4$, la vîrful rețelelor.

Exprimînd în coordonate $\tilde{W}_a$, $\tilde{\rho}$ ecuația (12) rezultă expresia:

$$\sqrt{\tilde{W}_a^2 + \left(\tilde{\rho} - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1 - D}{2} \sqrt{\tilde{W}_a^2 + \left(\tilde{\rho} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\bar{t}}{2} \tag{13}$$

Pentru $D = 0{,}5$ și $\bar{t}_{min} = 0{,}65$ rezultă ecuația:

$$4 \sqrt{\tilde{W}_a^2 + \left(\tilde{\rho} - \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\tilde{W}_a^2 + \left(\tilde{\rho} + \frac{1}{2}\right)^2} = 1{,}3 \tag{14}$$

care se reprezintă în sistemul de axe $\tilde{W}_a$, $\tilde{\rho}$ prin curba C_D figura 5.

Pentru simplificarea construcției curbei C_D porțiunea din curba C_D dintre cercurile O_w și O se aproximează cu un arc de cerc de ecuație:

$$W_a^2 + (\tilde{\rho} - 1)^2 = 1{,}2^2 \tag{14'}$$

cu centrul în O_D (0,1).

Evident totalitatea punctelor din interiorul cercului O_D se scot din domeniul de funcționare al rețelelor de compresor.

Este interesant de remarcat faptul că, curba de ecuație (13)pentru $D = 0{,}5$

$$4\sqrt{\tilde{W}_a^2 + \left(\tilde{\rho} - \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\tilde{W}_a^2 + \left(\tilde{\rho} + \frac{1}{2}\right)^2} = 2\bar{t} \tag{15}$$

generalizează rezultatele stabilite de Howell.

Conform relației lui Howell, valabilă pentru unghiuri $\beta_2 = 90° - 130°$, între deviația maximă a curentului ΔW_u și viteza axială există relația

$$\frac{\Delta W_u}{W_a} = \frac{1{,}55}{1 + 1{,}5 \cdot \bar{t}} \tag{16}$$

sau în noile coordonate

$$\tilde{W}_a = 0{,}645 + 0{,}968 \cdot \bar{t} \tag{16'}$$

Deci relația lui Howell se reprezintă printr-o dreaptă paralelă cu axa $O\tilde{\rho}$, valorile parametrului $\tilde{W}_a$ fiind apropiate de valorile maxime ce se obțin din relația (15) pentru aceleași desimi. Se poate deci aprecia că relația lui Howell aproximează domeniul deviațiilor maxime ale aerului la debite mici (vezi fig. nr. 5).

5. Limitele maxime ale domeniului de funcționare

Pentru stabilirea limitelor maxime ale domeniului se are în vedere faptul că în mod obișnuit

$$\bar{t}^* = 0{,}25 - 0{,}3$$

la raza medie, $\rho = 1$, iar $\overline{W}_{a_{max}} = 1$.

Rezultă deci $\tilde{W}_{a_{max}} = 4$ și $\tilde{\rho}_{max} = 4$, valori care limitează la dreapta și superior domeniul de funcționare al rețelelor deceleratoare.

Cunoscînd acum domeniul maxim de funcționare al rețelelor se poate preciza domeniul cu performanțe optime.

Astfel pentru $\rho = 0{,}5$, $\overline{W}_a = 0{,}5 - 0{,}6$ iar $\bar{t}^* = 0{,}25 - 0{,}3$ rezultă:

$$\tilde{\rho} = 1{,}52 - 2\,; \quad \tilde{W}_a = 1{,}52 - 2{,}4.$$

Concluzii

Stabilirea domeniului maxim de funcționare a rețelelor deceleratoare permite definirea și trasarea caracteristicilor acestor rețele în coordonate generalizate

Există posibilitatea limitării funcționării rețelelor cu:

a. $\beta_2 =$ constant;
b. $\beta_m =$ constant
c. $\tilde{W}_a =$ constant.

în funcție de desime și incidență.

Avîndu-se în vedere posibilităţile de deviaţie maximă a curentului, rezultată din diagrama universală se poate conchide că lucrul mecanic maxim ce poate fi realizat este dictat din considerente mecanice.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. Stanciu*, Buletin I.P.B. nr. 3, 1981.
2. *R. Bidard*, Energétique et turbomachines, Editions Eyrolles, Paris, 1979.
3. *A. Irving, ş.a.* Aerodynamic Design of Axial Compressors, Cleveland, Ohio, 1965.

Limitation du domaine de fonctionnement des réseaux de pales décélérateures

On établit le domaine maximum de chargement des réseaux décélérateurs à l'aide des critères gazodynamiques.

On impose certaines limites au réseau et à l'accélération de freinage du fluide de travail. Ces limitations sont utilisées ensuite pour fixer le domaine maximum de fonctionnement des réseaux de compresseur ; le domaine est représenté sur le diagramme universel des vitesses des réseaux de pales.

C.Z.: 629.423

INFLUENȚA DISPOZITIVULUI „ANTICABRAJ" ASUPRA VARIAȚIEI SARCINILOR PE OSIILE LOCOMOTIVELOR CU REFERIRE LA LOCOMOTIVA C.F.R.060—EA DE 5100 kW.

I. SEBEȘAN, GH. NICHITA *

Sarcinile pe osii la locomotive sînt modificate prin efectele cabrajului datorită modului de transmitere a forței de tracțiune.

Mărimea variațiilor de sarcini pe osii depinde de sistemul de antrenare al osiei, de tipul legăturii între cutia vehiculului și boghiuri, de amplasarea aparatului de tracțiune, de sistemul de suspensie ca și de eventualele dispozitive „anticabraj" care echipează locomotiva.

Autorii arată în acest studiu cum influența diferitelor organe ale locomotivei asupra variației sarcinilor pe osii poate fi tratată într-un mod general.

Studiul a permis să se stabilească pentru cazul locomotivei electrice C.F.R.060-EA relații de calcul și o diagramă fără dimensiuni care arată influența dispozitivului „anticabraj" asupra variației sarcinilor pe osii și totodată permit optimizarea dispozitivului.

1. Considerații generale

La locomotivele cu acționare individuală a osiilor prin motoare electrice de tracțiune este cunoscut faptul că, în regim de tracțiune datorită cuplului de cabraj, se produce descărcarea unora dintre osii și respectiv supraîncărcarea altora. Acest lucru are consecințe asupra gradului de folosire a greutății aderente a locomotivei și respectiv diminuarea performanțelor ei de tracțiune. Fenomenul se manifestă mai accentuat în perioada de demaraj cînd apare și pericolul de patinare cu toate efectele negative ale acestuia.

Modificarea sarcinilor pe osii datorită cabrajului depinde în principal :

— de modul de acționare a osiilor de către motoarele electrice de tracțiune ;

— de modul de transmitere a forței de tracțiune de la periferia roților la aparatul de tracțiune ;

— de tipul suspensiei și legăturile dintre cutie și boghiuri ;

— de existența și tipul dispozitivului de „anticabraj" utilizat (dacă acesta există).

Metoda de calcul folosită în lucrarea de față se bazează pe izolarea părților principale ale locomotivei (cutie, boghiu, osie), introducerea forțelor și momentelor din legături pentru fiecare parte principală și în final suprapunerea efectelor.

---

* Șef lucrări dr. ing. ; Conf. dr. ing., catedra Material rulant și tehnologia transporturilor feroviare

Pentru întocmirea modelului general de calcul au fost admise următoarele ipoteze simplificatoare:

— Forța de tracțiune a locomotivei (F_0) se transmite integral de la periferia roților la aparatul de tracțiune;

— Toate articulațiile sistemului de suspensie sînt fără frecări;

— Boghiurile sînt identice;

— Arcurile de suspensie prezintă caracteristicile simetrice față de axa longitudinală a vehiculului.

2. Variația sarcinilor pe osii

Tendința actuală de sporire a puterii locomotivelor impune utilizarea cît mai eficientă a greutății acestora, în special în perioada demarajului, cînd apare pericolul patinării osiilor care se descarcă.

La locomotivele cu transmisie individuală, forța de tracțiune a fiecărei osii motoare nu poate fi mai mare decît forța de aderență a osiei cel mai mult descărcată deoarece depășirea aderenței la una din osii ar produce patinarea iar forța de tracțiune necesară s-ar repartiza pe celelalte osii care vor patina și ele.

Valoarea efectivă a sarcinii pe osie va fi:

$$Q = Q_0 + \Delta Q_s + \Delta Q_d \qquad (1)$$

în care:

Q_0 reprezintă sarcina statică pe osie;

ΔQ_s — variația sarcinii pe osie datorită factorilor de natură statică;

ΔQ_d — variația sarcinii pe osie datorită factorilor de natură dinamică.

Variațiile dinamice ale sarcinilor pe osii se produc datorită oscilațiilor „de galop" ale cutiei locomotivei, care pot fi neglijate în raport cu variațiile statice de sarcini din perioada demarajului.

Variația sarcinilor de natură statică se produce datorită rotirii cutiei locomotivei în plan vertical longitudinal, rotirii boghiurilor și acțiunii motoarelor de tracțiune. Aceasta depinde de mai mulți factori de natură mecanică, în principal de tipul legăturii între cutie și boghiuri, de suspensia locomotivei, de modul de suspendare a motorului de tracțiune precum și de acțiunea dispozitivului „anticabraj".

Influența acestor factori este analizată la o locomotivă de tipul Co—Co, considerînd linia în palier și aliniament, boghiuri libere și forțe de tracțiune egale la toate osiile.

Considerînd cutia locomotivei eliberată de legături, cu forțele și momentele exterioare care acționează asupra ei (fig. 1), din condițiile de echilibru a momentelor față de punctele A și B, de sprijin a cutiei pe boghiuri, se obțin reacțiunile verticale ale boghiurilor.

$$\Delta V' = \frac{1}{2l}\left[6F_0(H-h) + M_1' + M_1''\right]$$

$$\Delta V'' = -\Delta V' \qquad (2)$$

în care :

$2l$	reprezintă	ampatamentul locomotivei ;
H	—	înălţimea cîrligului de tracţiune faţă de şină ;
h	—	înălţimea punctelor de transmitere a forţelor de tracţiune de la boghiuri la cutie (de pe cutie) ;
M_1', M_1''	—	momentele componentelor verticale ale forţelor din barele de tracţiune şi forţelor date de dispozitivul „anticabraj".

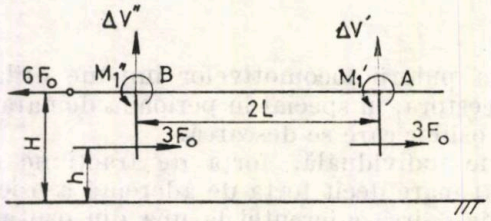
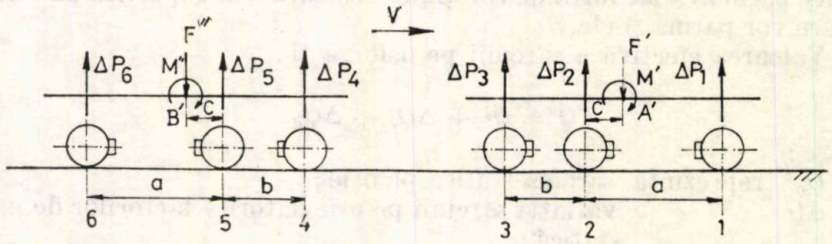


Fig. 1—Forţele şi momentele care acţionează asupra cutiei locomotivei.



Eig. 2—Forţele şi momentele care acţionează asupra boghiurilor.

Considerînd boghiurile reprezentate de axele lor longitudinale (fig. 2) cu forţele şi momentele reduse la torsori în punctele A' şi B' (centrele de rotaţie ale boghiurilor), din condiţiile de echilibru static şi din deformaţii, vor rezulta reacţiunile ΔP_i $(i = 1, \ldots, 6)$ ale suspensiei boghiurilor :

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 = F'$$

$$(a - c)\Delta P_1 - c\Delta P_2 - (b + c)\Delta P_3 = M'$$

$$\frac{b}{c_{a_1}}\Delta P_1 + \frac{a+b}{c_{a_2}}\Delta P_2 - \frac{a}{c_{a_3}}\Delta P_3 = 0 \qquad (3)$$

$$\Delta P_4 + \Delta P_5 + \Delta P_6 = F''$$

$$(b + c)\Delta P_4 + c\Delta P_5 - (a - c)\Delta P_6 = M''$$

$$\frac{a}{c_{a_3}}\Delta P_4 - \frac{a+b}{c_{a_2}}\Delta P_5 - \frac{b}{c_{a_1}}\Delta P_6 = 0$$

în care :

$c_{a_1}, c_{a_2}, c_{a_3}$ — sînt rigiditățile suspensiei de la osiile (1 ;6), (2 ;5) și (3 ;4) ;

$(F', M'),(F'',M'')$ — torsorii de reducere a forțelor în punctele A' și B' ;

a, b — distanțele dintre osiile boghiului ;

c — distanța dintre osia din mijloc a boghiului și centrul de rotație a boghiului.

Ținînd seama de forțele și momentele care acționează asupra boghiurilor avem :

$$F' = -\lambda F_0 + \Delta V'$$

$$M' = -3F_0(h_1 - r_0) - 3\lambda eF_0 + \lambda F_0(a + b + c) - c\Delta V' + M_2'$$

$$F'' = \lambda F_0 + \Delta V'' \tag{4}$$

$$M'' = -3F_0(h_1 - r_0) - 3\lambda eF_0 + \lambda F_0(a + b + c) + c\Delta V'' + M_2''$$

unde :

h_1 este înălțimea punctului de transmitere a forței de tracțiune de la boghiu la cutie (de pe boghiu) ;

e — distanța de la punctul de aplicație a reacțiunii verticale rezultante a motorului asupra boghiului, la osie ;

λF_0 — reacțiunea motorului asupra boghiului ; λ fiind un coeficient care depinde de modul de suspendare a motorului de tracțiune ;

M', M'' — momentele de reacțiune asupra boghiurilor produse de componentele verticale ale forțelor din barele de tracțiune și forțelor din dispozitivul „anticabraj".

Între variațiile de sarcini pe resorturi $\Delta P_i (i = 1, \ldots, 6)$ date de sistemul (3) și variațiile de sarcini pe osii $\Delta Q_{is} (i = 1, \ldots, 6)$ avem relațiile :

$$\Delta Q_{is} = \Delta P_i \pm \lambda F_0 \qquad (i = 1, \ldots, 6) \tag{5}$$

unde semnul (+) corespunde poziționării motorului electric de tracțiune înaintea osiei față de sensul de mers și (−) cînd motorul este după osie.

Variațiile de sarcini pe osie date de (5), în urma rezolvării sistemului (3), vor fi :

$$\Delta Q_{1s} = \frac{1}{N'}\left\{F'\left[\frac{(a+b)(b+c)}{c_{a_2}} + \frac{ac}{c_{a_3}}\right] + M'\left(\frac{a+b}{c_{a_2}} + \frac{a}{c_{a_3}}\right)\right\} - \lambda F_0$$

$$Q_{2s} = \frac{1}{N'}\left\{F'\left[-\frac{b(b+c)}{c_{a_1}} + \frac{a(a-c)}{c_{a_3}}\right] + M'\left(-\frac{b}{c_{a_1}} - \frac{a}{c_{a_3}}\right)\right\} + \lambda F_0 \tag{6}$$

$$Q_{3s} = \frac{1}{N'}\left\{F'\left[\frac{bc}{c_{a_1}} + \frac{(a+b)(a-c)}{c_{a_2}}\right] + M'\left(\frac{b}{c_{a_1}} - \frac{a+b}{c_{a_2}}\right)\right\} + \lambda F_0$$

$$Q_{4s} = \frac{1}{N''}\left\{F''\left[-\frac{bc}{c_{a_1}} - \frac{(a+b)(a-c)}{c_{a_2}}\right] + M''\left(\frac{b}{c_{a_1}} - \frac{a+b}{c_{a_2}}\right)\right\} - \lambda F_0$$

$$Q_{5s} = \frac{1}{N''}\left\{F''\left[-\frac{b(b+c)}{c_{a_1}} - \frac{a(a-c)}{c_{a_3}}\right] + M''\left(-\frac{b}{c_{a_1}} - \frac{a}{c_{a_3}}\right)\right\} - \lambda F_0$$

$$Q_{6s} = \frac{1}{N''}\left\{F''\left[-\frac{(a+b)(b+c)}{c_{a_2}} - \frac{ac}{c_{a_3}}\right] + M''\left(\frac{a+b}{c_{a_2}} + \frac{a}{c_{a_3}}\right)\right\} + \lambda F_0$$

în care N' şi N'' au expresiile :

$$N' = -\frac{b^2}{c_{a_1}} + \frac{(a+b)^2}{c_{a_2}} + \frac{a^2}{c_{a_3}} \qquad (7)$$

$$N'' = -N'$$

Antrenarea individuală a osiilor micşorează mult posibilităţile de a folosi întreaga greutate de aderenţă, din care cauză utilizarea unor mijloace adecvate pentru micşorarea descărcării osiilor (de „anticabraj"), datorită efectelor tracţiunii înalte, au devenit astăzi o necesitate constructivă la locomotivele moderne.

În scopul micşorării variaţiei sarcinilor pe osii la demarajul locomotivei este necesară folosirea unui dispozitiv „anticabraj" chiar dacă locomotiva este prevăzută cu sistem de tracţiune joasă cum este cazul locomotivei electrice CFR 060-EA.

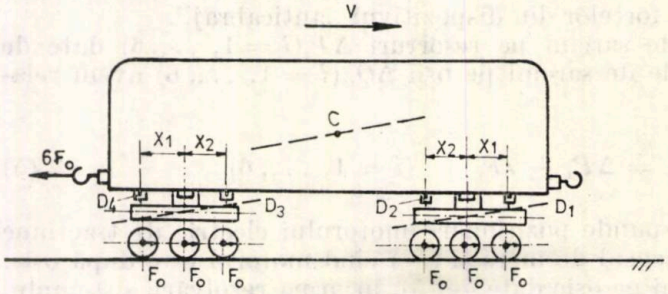


Fig. 3 — Plasarea dispozitivului „anticabraj"

Avînd în vedere sensul de înclinare a axelor longitudinale ale cutiei respectiv boghiurilor locomotivei, cînd aceasta dezvoltă forţă de tracţiune, dispozitivul „anticabraj" va trebui să cuprindă patru cilindri de forţă plasaţi conform figurii 3. Aceştia vor funcţiona astfel : la mersul spre dreapta al locomotivei acţionează cilindrii D_1 şi D_3 iar la mersul spre stînga cilindrii D_2 şi D_4.

Deoarece forţele F produse de cei doi cilindri în funcţionare au acelaşi sens, asupra variaţiei de sarcini pe osii nu vor influenţa decît momentele acestor forţe faţă de punctele A şi B la cutie, respectiv A' şi B' la boghiuri.

Ținîndu-se seama pe lîngă forțele din dispozitivul „anticabraj" și de acțiunea forțelor din barele de tracțiune ale locomotivei, momentele acestor forțe sînt date de relațiile :

$$M_1' = \frac{3}{2} F_0 d \operatorname{tg}\alpha + F_a x_1$$

$$M_1'' = \frac{3}{2} F_0 d \operatorname{tg}\alpha + F_a x_2$$

$$M_2' = \frac{3}{2} F_0 d_1 \operatorname{tg}\alpha + F_a (x_1 - c) \qquad (8)$$

$$M_2'' = \frac{3}{2} F_0 d_1 \operatorname{tg}\alpha + F (x_2 - c)$$

în care :

d este distanța dintre punctele de articulație ale barelor de tracțiune cu cutia locomotivei ;

d_1 — distanța dintre punctele de articulație ale barelor de tracțiune cu boghiul ;

α — unghiul de înclinare față de orizontală al barei de tracțiune ;

x_1, x_2 — distanțele dintre punctele de plasare a cilindrilor dispozitivului „anticabraj" și punctele de sprijin ale cutiei pe boghiuri (fig. 3).

3. Variația de sarcini pe osii la locomotiva electrică C.F.R.060-EA echipată cu dispozitiv „anticabraj"

Locomotiva electrică C.F.R.060-EA în actuala variantă constructivă nu este prevăzută cu dispozitiv „anticabraj". Diminuarea efectelor cabrajului cutiei și boghiurilor se realizează prin sistemul de tracțiune joasă, barele de tracțiune fiind articulate cu boghiurile sub nivelul axelor osiilor.

Pentru îmbunătățirea performanțelor de tracțiune ale locomotivei și mai ales pentru diminuarea pericolului patinării roților la pornire (evitarea stick-slip-ului) se pune în prezent la calea ferată problema echipării locomotivei cu dispozitiv „anticabraj".

Prin plasarea cilindrilor de forță ai dispozitivului pe traversele frontale ale boghiurilor rezultă $x_1 = 3{,}35$ m și $x_2 = 3{,}2$ m. Ceilalți parametri care intervin în calculul variației sarcinilor pe osii au valorile :

$l = 5{,}15$ m ; $a = 2{,}25$ m ; $b = 2{,}1$ m ; $H = 1{,}05$ m ;

$h = 0{,}59$ m ; $h_1 = 0{,}484$ m ; $r_0 = 0{,}605$ m ; $c = 0{,}05$ m ;

$e = 0{,}455$ m ; $d = 3{,}23$ m ; $d_1 = 2$ m ; $\alpha = 10°$;

$c_{a_1} = c_{a_3} = 228 \cdot 10^4 \text{N/m}$; $c_{a_2} = 134 \cdot 10^4 \text{N/m}$;

$\lambda = 0{,}876$ (locomotiva are motor electric de tracţiune complet suspendat pe cadrul boghiului).

Făcînd înlocuirile în relaţiile (8) şi apoi (2) se obţine :

$$\Delta V' = -\Delta V'' = -0{,}434\, F_0 - 0{,}636\, F_d \tag{9}$$

Din relaţiile (4), (7) şi (6) se obţin variaţiile statice de sarcini pe osiile 1 . . .6 ale locomotivei :

$$\begin{aligned}
\Delta Q_{1s} &= -0{,}735\, F_0 + 0{,}669\, F_d \\
\Delta Q_{s2} &= -0{,}507\, F_0 + 0{,}450\, F_d \\
\Delta Q_{3s} &= -0{,}206\, F_0 - 0{,}855\, F_d \\
\Delta Q_{4s} &= \quad 0{,}206\, F_0 + 0{,}839\, F_d \\
\Delta Q_{5s} &= -0.507\, F_0 + 0{,}437\, F_d \\
\Delta Q_{6s} &= \quad 0{,}735\, F_0 - 0{,}641\, F_d
\end{aligned} \tag{10}$$

Dreptele de variaţie ale sarcinilor pe osii raportate la forţa de tracţiune $F_0(\Delta Q_{is}/F_0$; $i = 1 \ldots 6)$ în funcţie de forţa F_d produsă de un cilindru al dispozitivului „anticabraj" de asemenea raportată la $F_0(F_d/F_0)$, s-au reprezentat în figura 4.

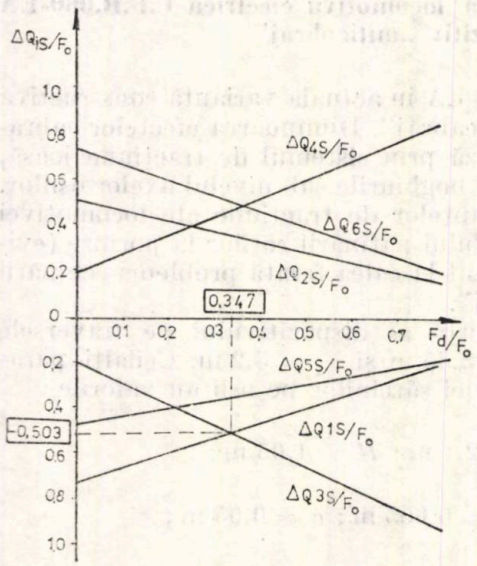


Fig. 4 —Dreptele de variaţie ale sarcinilor pe osii în funcţie de forţa dată de dispozitivul „anticabraj".

Examinînd expresiile variațiilor statice de sarcini pe osii și a modului cum forța F_d influențează aceste variații de sarcini se trage concluzia că se poate determina o valoare optimă a forței F_d care să ducă la variații minime de sarcini pe osii.

Această valoare rezultă din condiția ca la osiile 1 și 3 să se obțină aceleași variații de sarcini, adică : $\Delta Q_{1s} = \Delta Q_{3s}$. Astfel :

$$-0{,}735 \cdot F_0 + 0{,}669\, F_d = -0{,}206\, F_0 - 0{,}855\, F_d$$

de unde :

$$F_d = F_{d\text{opt}} = 0{,}347 \cdot F_0$$

Cu această valoare a lui F_d se obțin variațiile statice de sarcini pe osii din tabelul de mai jos :

Osia	1	2	3	4	5	6
Q	$-0{,}503 \cdot F_0$	$0{,}351 \cdot F_0$	$-0{,}503 \cdot F_0$	$0{,}497 \cdot F_0$	$-0{,}357 \cdot F_0$	$0{,}513 \cdot F_0$

Concluzii

1) Se observă o influență importantă a dispozitivului „anticabraj" Astfel, coeficientul de utilizare a greutății de aderență în cazul locomotivei fără dispozitiv de „anticabraj" este :

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \beta \mu_a} = 0{,}805$$

unde $\beta = -0{,}735$ este coeficientul variației de sarcină statică la osia cea mai descărcată ($\beta = \Delta Q_{1s}/F_0$) și $\mu_a = 0{,}33$ coeficientul de aderență roată-șină.

În cazul cînd locomotiva este echipată cu dispozitiv de „anticabraj" rezultă pentru $\beta = -0{,}503$ valoarea $\varepsilon = 0{,}858$ adică o pierdere de 14,2% din forța de tracțiune datorită variației sarcinilor pe osii comparativ cu pierderea de 19,5% cînd nu există dispozitivul „anticabraj".

2) După cum a rezultat din calcule, forța F_d trebuie să fie proporțională cu forța de tracțiune F_0. În cazul cînd corelarea se face cu forța de tracțiune a întregii locomotive $F_{0L} = 6\, F_0$ atunci :

$$F_d = 0{,}347\, \frac{F_{0L}}{6} = 0{,}058 \cdot F_{0L}$$

Cum se poate considera că forța de tracțiune este proporțională cu curentul de sarcină, dispozitivul de „anticabraj" poate fi reglat automat printr-o comandă proporțională cu valoarea curentului de sarcină.

BIBLIOGRAFIE

1. *Von Gaston Borgeaud*, Glasers Annalen, 89(1965), nr. 7.
2. *I. Sebeșan*, Rev. Transporturilor și telecomunicațiilor, nr. 3, 1975.

3. *N. Condacse, I. Sebeşan*, Rev. Transporturilor şi telecomunicaţiilor, nr. 2, 1976.
4. *I. Sebeşan*, „Contribuţii la studiul influenţei fenomenului de stick-slip asupra caracteristicilor de tracţiune ale locomotivelor diesel cu transmisie în curent alternativ — curent alternativ". Teză de doctorat, I. P. Timişoara, 1981

L'influence d'un dispositif d'anti-cabrage sur les changements des charges des essieux avec référence à la locomotive C.F.R.060 — EA de 5100 kw

Les charges d'essieu d'une locomotive sont modifiées par les différents effets de cabrage dûs à l'éffort de traction. L'importance de ces changements de charge dépend du genre du mécanisme de commande d'essieu, du mode de liaison entre caisse et bogies, de l'emplacement de l'appareil de traction, du système de suspension ainsi que des éventuels appareils d'anti-cabrage. Les auteurs montrent comment l'influence de ces différents organes sur les charges des essieux peut être traitée d'une façon tout à fait générale.

L'étude permet d'établir des relations et un diagramme sans dimension qui donne un aperçu direct sur l'influence d'un dispositif d'anti-cabrage.

C.Z. :629.735.3 :662.6

MINIMIZAREA CONSUMULUI DE COMBUSTIBIL AL AVIOANELOR STUDIU DE CAZ PENTRU AVIONUL ROMBAC 1 — 11

A. STOICA *

Minimizarea consumului de combustibil al avioanelor, pe distanțe de zbor fixate. a căror traiectorie este compusă din urcare, croazieră și coborîre, este abordată utilizînd principiul minimului.

Rezultatele teoretice obținute sînt aplicate pe modelul simplificat al unui avion de tip ROMBAC 1—11, evidențiindu-se diferențele de performanță care apar față de traiectorii neoptimale.

Introducere

Creșterea continuă a cheltuielilor de exploatare a avioanelor, a determinat intensificarea cercetărilor atît în direcția îmbunătățirii parametrilor constructivi ai acestora cît și pentru optimizarea traiectoriilor de zbor.

În cele ce urmează se va aborda problema minimizării consumului de combustibil al avioanelor subsonice, pe parcursul unui zbor în plan vertical, între două puncte fixate, presupunînd cunoscut modelul matematic care descrie evoluția aeronavei.

Pentru ilustrarea concluziilor teoretice, sînt prezentate rezultatele numerice ale algoritmului de optimizare pentru un avion de tipul ROMBAC 1-11, seria 500.

NOTAȚII UTILIZATE

T — tracțiunea
D — rezistența la înaintare
d_c — distanța de croazieră
d_f — distanța totală de zbor
d_{urc}, d_{cob} — distanța parcursă în timpul urcării, respectiv coborîrii
E — energia totală în unități de înălțime
E_c — energia de croazieră
E_{copt} — energia optimă de croazieră
g — accelerația gravitațională
H — hamiltonianul
h — altitudinea
J — indicele de performanță

* Asist. ing., catedra Aeronave

P — consumul de combustibil
C_{SP} — consumul specific de combustibil în unitatea de timp în raport cu tracțiunea
t — timpul
t_{urc}, t_{cob} — timpul de urcare, respectiv coborîre
t_0, t_f — timpul inițial, respectiv final
V_{urc}, V_{cob} —viteza la urcare, respectiv coborîre
V_v — viteza vîntului
M — masa aeronavei
x — distanța parcursă
γ — unghiul de pantă al traiectoriei
$\lambda(E_c)$ — consumul minim de combustibil la croazieră pe unitatea de distanță
π — poziția manetei de gaze
ψ — variabila adjunctă

1. Formularea problemei

În scopul simplificării modelului matematic care descrie evoluția aeronavei și a calculelor de determinare a comenzilor optimale, se fac următoarele ipoteze:

1. Aeronava se consideră un solid rigid în spațiu.
2. Se presupune că axa longitudinală a avionului și direcția tracțiunii coincid.
3. Se consideră că unghiurile de pantă ale traiectoriei sînt mici.
4. Se neglijează dinamica unghiului de pantă al traiectoriei.
5. Efectele variației masei avionului, datorate arderii combustibilului sînt neglijabile în optimizarea traiectoriei, deci se presupune că masa este constantă.
6. Se consideră că zborul se realizează în plan vertical.
7. Traiectoria aeronavei se compune din: urcare, croazieră și coborîre; presupunem că în toate aceste evoluții energia totală $E = h + \frac{V^2}{2g}$ variază strict monoton (cu excepția palierului de croazieră, pe care energia este constantă).

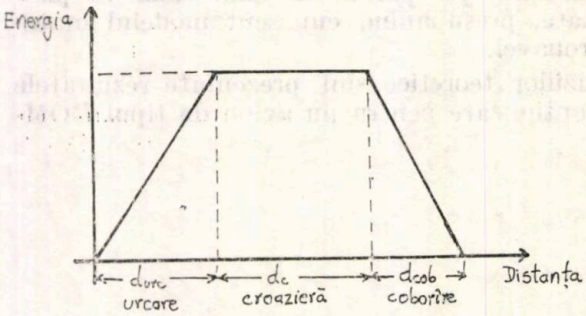


Fig. 1 — Structura traiectoriei optimale

Deci traiectoria optimală are structura prezentată în fig. 1:

În condițiile ipotezelor 1—7, se obțin următoarele ecuații de mișcare în plan vertical:

$$\frac{1}{g}\frac{dV}{dt} = \frac{T - D}{M} - \sin\gamma \tag{1a}$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin\gamma \tag{1b}$$

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\gamma + V_v \cong V + V_v \tag{1c}$$

Dîndu-se valorile extreme ale stărilor :

$$V(t_0),\ h(t_0),\ x(t_0) \tag{2a}$$

$$V(t_f),\ h(t_f),\ x(t_f) \tag{2b}$$

și indicele de performanță

$$J = \int_{t_0}^{t_f} P\ \mathrm{d}t \tag{3}$$

cu t_f — liber, unde P reprezintă consumul de combustibil consumat în unitatea de timp se cere să se determine comenzile optimale π^* și γ supuse restricțiilor

$$\pi^* \in [\pi_{min},\ \pi_{max}] \tag{4a}$$

$$\gamma^* \in [\gamma_{min},\ \gamma_{max}] \tag{4b}$$

astfel încît să se asigure minimizarea indicelui de performanță J.
π_{max} și π_{min} reprezintă pozițiile manetei de gaze care maximizează și respectiv minimizează tracțiunea $T(\pi, V, h)$.

2. Aspecte teoretice ale problemei

Ținînd cont de structura presupusă a traiectoriei de zbor, rezultă :

$$J = \int_{t_o}^{t_{urc}} Pdt + (d_f - d_{urc} - d_{cob})\ \lambda + \int_{t_{cob}}^{t_f} Pdt \tag{5}$$

Schimbînd variabila independentă— timp în energie, prin relația

$$dt = \frac{dE}{\dot{E}} \tag{6}$$

și avînd în vedere ipoteza privind monotonia energiei, rezultă :

$$J = \int_{E_i}^{E_c} \frac{P}{\dot{E}}\bigg|_{\dot{E}>0} dE + (d_f - d_{urc} - d_{cob})\ \lambda + \int_{E_f}^{E_c} \frac{P}{|\dot{E}|}\bigg|_{\dot{E}<0} dE \tag{7}$$

Utilizînd transformarea menționată, ecuația (1c) devine :

$$\frac{d(x_{urc} + x_{cob})}{dE} = \frac{V_{urc} + V_{vurc}}{\dot{E}}\bigg|_{\dot{E}>0} + \frac{V_{cob} + V_{vcob}}{|\dot{E}|}\bigg|_{\dot{E}<0} \tag{8}$$

În continuare se va determina comanda optimală a sistemului (7 cu criteriul (6) concluziile asupra traiectoriei optimale rămînînd valabile și pentru problema optimizării sistemului (1) cu criteriul (3).

S-a ajuns la o problemă de tip Bolza, care se va rezolva folosind principiul lui Pontriaghin.

Din relațiile (6) și (7) rezultă expresia hamiltonianului:

$$H = \frac{P}{\dot{E}}\bigg|_{\dot{E}>0} + \frac{P}{\dot{E}}\bigg|_{\dot{E}<0} + \psi\left[\frac{V_{urc} + V_{vurc}}{\dot{E}}\bigg|_{\dot{E}>0} + \frac{V_{cob} + V_{vcob}}{\dot{E}}\bigg|_{\dot{E}<0}\right] \tag{9}$$

Sistemul adiunct este:

$$\frac{d\psi}{dE} = -\frac{\partial H^*}{\partial(x_{urc} + x_{cob})} \equiv 0 \tag{10}$$

unde

$$H^* = \min_{\substack{\pi_{urc},\,\pi_{cob} \\ V_{urc},\,V_{cob}}} H \tag{11}$$

Condiția de transversalitate este:

$$\psi(E_c) = \frac{\partial(d_f - x_{urc} - x_{cob})\lambda}{\partial(x_{urc} + x_{cob})}\bigg|_{E=E_c} = -\lambda \tag{12}$$

iar condiția la capătul intervalului are expresia:

$$\left[H^* + \frac{\partial(d_f - d_{urc} - d_{cob})\,\lambda(E)}{\partial E}\right]_{E=E_c} = 0 \tag{13}$$

Din relația (13) rezultă imediat:

$$\left[H^* + d_c\frac{d\lambda}{dE}\right]_{E=E_c} = 0 \tag{14}$$

unde d_c reprezintă lungimea croazierei.

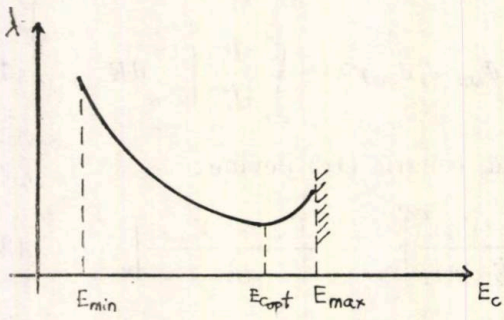


Fig. 2 — Dependența consumului minim de combustibil pe unitatea de distanță de energia de croazieră

În scopul minimizării costului de combustibil consumat la croazieră, $\lambda(E_c)$ se determină cu relația:

$$\lambda(E_c) = \min_{V_c}\frac{P(T_c, E_c, V_c)}{V + V_v} =$$

$$= \min_{V_c}\frac{T(\pi_c, V_c, h_c)\cdot C_{SP}(V_c, h_c)}{V_e} \tag{15}$$

unde $T_c = D(V_c)$

Din practică, rezultă următoarea formă a graficului funcției $\lambda(E_c)$: Fig. 2. Impunînd condiția $E \in [E_{min}, E_{copt}]$ și avînd în vedere relația (14), rezultă următoarele structuri posibile ale traiectoriei optimale :

— $d_c \neq 0$ dacă $H^*(E_c) > 0$ și $E_c < E_{copt}$

— $d_c = 0$ dacă $H^*(E_c) = 0$ și $E_c < E_{copt}$

— d_c este nedeterminat dacă $H^*(E_c) = 0$ și $E_c = E_{copt}$

Menționăm faptul că aplicarea algoritmului de optimizare pentru diferite valori ale variabilei libere E_c, conduce la distanțe de zbor, d_f, specifice.

Utilizînd expresia simplificată a consumului de combustibil în unitatea de timp :

$$P = T \cdot C_{SP}$$

și înlocuind în relația (9) a hamiltonianului relația (6) rezultă :

$$H = H_{urc} + H_{cob} \tag{16}$$

unde

$$H_{urc} = \frac{C_{SP} \cdot M}{V_{urc}} \left[\frac{T_{urc} - \frac{\lambda}{C_{SP}} \cdot V_{urc}}{T_{urc} - D} \right]_{T_{urc} > D} \tag{17a}$$

și

$$H_{cob} = \frac{C_{SP} \cdot M}{V_{cob}} \left[\frac{T_{cob} - \frac{\lambda}{C_{SP}} \cdot V_{cob}}{|T_{cob} - D|} \right]_{T_{cob} < D} \tag{17b}$$

Deoarece perechile de comenzi (π_{urc}, V_{urc}) și (π_{cob}, V_{cob}) sînt independente, minimizarea hamiltonianului este asigurată de (π^*_{urc}, V^*_{urc}) și (π^*_{cob}, V^*_{cob}) care satisfac relațiile :

$$H^*_{urc} = \min_{V^*_{urc},\, \pi^*_{urc}} H_{urc} \tag{18a}$$

și respectiv

$$H^*_{cob} = \min_{\pi^*_{cob},\, V^*_{cob}} H_{cob} \tag{18b}$$

Considerînd funcțiile $H_{urc}(T)$ și $H_{cob}(T)$ pentru valori fixate ale lui V și h se obțin hiperbole ale căror valori minime sînt atinse pentru $T_{max} = T(\pi_{max}, V, h)$ și respectiv $T_{min} = T(\pi_{min}, V. h)$, deci :

$$\pi^* = \begin{cases} \pi_{max}, \text{ pentru } E < E_c \text{ și } \dot{E} > 0 \\ \pi_{min} \text{ pentru } E < E_c \text{ și } \dot{E} < 0 \\ \pi_c \text{ determinat din } T(\pi_c, V_c, h_c) = D(V_c) \text{ pentru } E = E_c \end{cases}$$

De asemenea, utilizînd funcțiile $V^*_{urc}(h)$ și $V^*_{cob}(h)$ obținute din relațiile (18) și înlocuindu-le în (1a) și (1b) rezultă valorile optimale ale unghiului

de pantă al traiectoriei:

$$\gamma^*_{urc}(h) = \begin{cases} \gamma^*_{urc} & \text{dacă } \gamma \in [0, \gamma_{max}) \\ \gamma_{max} & \text{dacă } \gamma \geqslant \gamma_{max} \end{cases} \tag{19a}$$

unde

$$\gamma^*_{urc} = \frac{T^*_{urc} - D}{M\left[V^*_{urc} \cdot \frac{\mathrm{d}V^*_{urc}}{\mathrm{d}h} + g\right]}$$

și respectiv:

$$\gamma^*_{cob}(h) = \begin{cases} \gamma^*_{cob} & \text{dacă } \gamma \in (\gamma_{min}\ ,\ 0] \\ \gamma_{min} & \text{dacă } \gamma \leqslant \gamma_{min} \end{cases} \tag{19b}$$

unde

$$\gamma^*_{cob} = \frac{T^*_{cob} - D}{M\left[V^*_{cob} \cdot \frac{\mathrm{d}V^*_{cob}}{\mathrm{d}h} + g\right]}$$

Determinarea distanței de croazieră d_c impune, conform relației (14), calculul hamiltonianului la croazieră. Pentru aceasta se consideră valoarea lui V obținută din relația (15) și $T_c = D(V_c)$; prin dezvoltarea în serie Taylor a funcțiilor $P(T, V)$ și $D(V)$ în jurul punctului de croazieră (T_c, T_c) și prin trecerea la limită $\Delta V \to 0$, rezultă următoarele:

Cazul 1: dacă C_{SP} este independent de T, atunci:

$$H_{urc}(\Delta T, \Delta V = 0) = \frac{M}{V_c} C_{SP}(V_c, h_c) \tag{20a}$$

$$H_{cob}(\Delta T, \Delta V = 0) = -\frac{M}{V_c} C_{SP}(V_c, h_c) \tag{20b}$$

În ipoteza $D_{V^2} > (2C_{SP} \cdot D_V + T_C \cdot C_{SPV^2})$ care este verificată în practică studiul monotoniei hamiltonianului $H(\Delta T, \Delta V)$ arată că $\Delta V = 0$ minimizează valoarea acestuia la croazieră, deci expresiile (20a) și (20b) dau valoarea lui H^*_{urc} și respectiv H^*_{cob}. Rezultă imediat:

$$H^*|_{Ec} = H^*_{urc}|_{Ec} + H^*_{cob}|_{Ec} = 0$$

deci d_c (în ipoteza $E_c < E_{copt}$).

Cazul 2: dacă C_{SP} depinde de tracțiunea T, atunci:

$$H_{urc}(\Delta T,\ \Delta V = 0) = \frac{MC_{SP}}{V_c}\left[1 + \frac{T_c\, C_{SPT}}{C_{SP}} + \frac{\Delta T}{2C_{SP}}(2C_{SPT} + T_c\, C_{SPT^2})\right. \tag{21a}$$

$$H_{cob}(\Delta T, \Delta V = 0) = \frac{M \cdot C_{SP}}{V_c}\left[-1 - \frac{T_c \cdot C_{SPT}}{C_{SP}} + \frac{|\Delta T|}{2C_{SP}} \cdot \right.$$

$$\left. (2C_{SPT} + T_c \cdot C_{SPT^2})\right] \tag{21b}$$

în ipoteza verificată în practică $2C_{SPT} + T_c\, C_{SPT^2} > 0$ se arată că perechea $(\Delta T = 0,\ \Delta V = 0)$ minimizează hamiltonianul $H(\Delta T, \Delta V)$, rezultînd:

$$H^*|_{E_c} = H^*_{urc}|_{E_c} + H^*_{cob}|_{E_c} = 0$$

deci $d_c = 0$ (în ipoteza $E_c < E_{copt}$).

Observații

a) Se constată din relațiile (20) că $H^*(\Delta T, \Delta V = 0)$ nu depinde de variațiile ΔT, deci chiar dacă se impun anumite restricții la urcare sau la coborîre asupra tracțiunii rămîne valabilă concluzia $d_c = 0$.

În cazul 2, însă, dacă se pune condiția ca tracțiunea la urcare să nu depășească o anumită limită superioară mai mică însă decît T_c, (sau similar la coborîre, tracțiunea să nu fie sub o anumită valoare minimă) atunci $\Delta T \neq 0$ în relațiile (21) deci $H^*|_{E_c} \neq 0$. În această situație distanța de croazieră d_c este nenulă și se determină cu relația (14).

b) În apropierea energiei de crozieră E_c, calculul direct al vitezei optimale de urcare (respectiv coborîre) din relațiile (18), devine dificil datorită faptului că atît numitorul cît și numărătorul tind spre 0. De aceea este recomandat ca la $E \lesssim E_c$ să se folosească o metodă de gradient pentru determinarea comenzilor optimale.

3. Rezultate numerice

Modelul utilizat în programul de determinare a traiectoriei optimale a fost obținut prin aproximarea liniară a mărimilor $T(\pi, V, h)$, $D(V)$ și $C_{SP}(V, h)$ pentru un avion de tip ROMBAC 1—11, și verificînd ipotezele făcute mai sus.

Din reprezentarea traiectoriilor optimale de urcare, pentru diferite valori ale poziției manetei de gaze, rezultă că panta traiectoriei crește odată cu tracțiunea, avînd la începutul traiectoriei valori maxime și variind lent spre zero odată cu apropierea de regimul de croazieră.

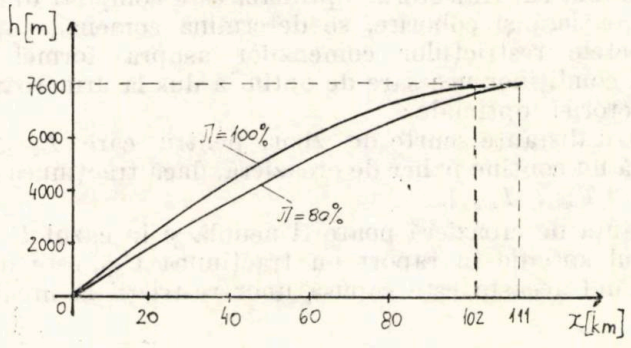


Fig. 3 — Traiectorii de zbor la urcare

Studiul asupra vitezelor optimale indică faptul că minimizarea consumului de combustibil se realizează pe seama reducerii timpului total de zbor.

Utilizarea tracțiunilor optimale pe timpul urcării a determinat scăderea consumului de combustibil cu 7,5 % față de cazul în care $\pi_{urc} = 80\,\%$ π_{max}. Acest lucru este explicabil și prin faptul că timpul de parcurgere al

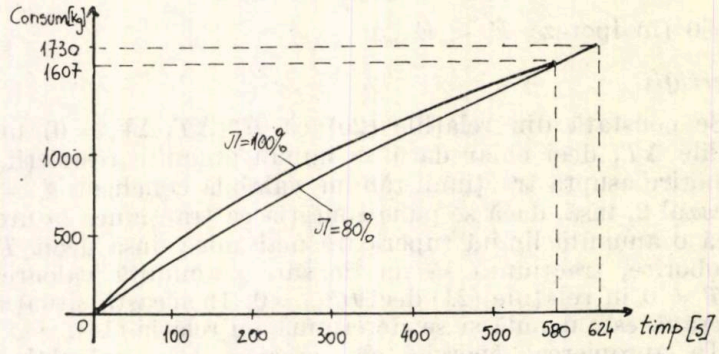


Fig. 4 — Consumul de combustibil funcție de timp

straturilor dense ale atmosferei (unde consumul de combustibil este mai mare) se reduce dacă tracțiunea este maximă.

Traiectoriile de zbor la urcare pînă la înălțimea de 7600 m și consumurile corespunzătoare de combustibil sînt ilustrate în figurile 3 și respectiv 4.

Determinarea variabilei adjuncte care intervine în problema de minim, se face iterativ pentru realizarea condiției finale impuse distanței totale de zbor.

4. Concluzii

Problema formulată în acest articol este minimizarea consumului de combustibil al avionelor subsonice între două puncte fixate.

Presupunînd că traiectoria optimală este compusă dintr-o porțiune de urcare, croazieră și coborîre, se determină comenzile optimale și se stabilesc efectele restricțiilor comenzilor asupra formei traiectoriei

Analiza condițiilor necesare de optim a dus la următoarele concluzii asupra traiectoriei optimale:

— pentru distanțe scurte de zbor, pentru care $E_c < E_{copt}$ traiectoria optimală nu conține palier de croazieră, dacă tracțiunea este cuprinsă în intervalul $[T_{min}, T_{max}]$.

— distanța de croazieră poate fi nenulă și în cazul $E < E_c$, atunci cînd consumul specific în raport cu tracțiunea C_{SP}, este dependent de tracțiune, și cînd aceasta este supusă unor restricții la urcare sau la coborîre.

BIBLIOGRAFIE

1. *S. Călin, C. Belea*, „Sisteme automate adaptive și optimale" Ed. Tehnică, 1971
2. *N. Racoveanu*, „Automatica", Ed. Militară, 1980

3. *L. Pontriaghin, ş.a.*, „Théorie mathématique des processus optimaux" Editions de Moscou, 1974.
4. *H. Erzerberger, ş.a.* Journal Guidance of Control, vol. 3, nr. 1, 1980.
5. *J. Burrows*, Journal Guidance of Control, vol. 6, nr. 1, 1983
6. *V. Ionescu, L. Lupaş*, „Tehnici de calcul în teoria sistemelor", vol. II, Ed. Tehnică, 1974

The Fuel Minimisation for Aircraft, Simulation for the Aircraft ROMBAC *1-11*

The fuel minimisation for aircraft with specific range, which trajectories consist of climb, cruise and descent segments, is obtained by application of Portryagin's minimum principle.

The theoretical results obtained, are illustrated for an aircraft ROMBAC 1—11 and there are shown the performance differences between the optimal and nonoptimal trajectories.

C.Z.: 629. 7. 025—52

INFLUENȚA COMENZILOR SERVOASISTATE ÎN CALCULUL DINAMIC AL SUPRAFEȚELOR PORTANTE

E. ȚURLEA*

În articolul de față este prezentată o metodă de analiză a comportării în regim dinamic a unei suprafețe portante prevăzută cu lanț de comandă servoasistat și sistem de comandă automat, pe baza funcțiilor de răspuns în frecvență și impedanței servomecanismului. Sînt prezentate metode teoretice de determinare a celor două mărimi, rezultatele obținute putînd fi ușor interpretate și verificate experimental.

1. Introducere

Utilizarea comenzilor servoasistate în construcția aeronavelor a condus la modificări importante în comportamentul acestora și implicit în calculul și analiza lor statică și dinamică. Rigiditatea de prindere a suprafeței de comandă trebuie înlocuită cu cea a actuatorilor hidraulici al căror comportament este de cu totul altă natură fizică decît pentru cazul comenzilor manuale. De asemenea, trebuie avut în vedere faptul că avionul cu servocomandă hidraulică reprezintă în sens energetic un sistem activ.

În fig. 1 este reprezentată o schemă bloc a principalilor factori ce trebuie considerați într-o modelare aeroelastică a sistemului avion în

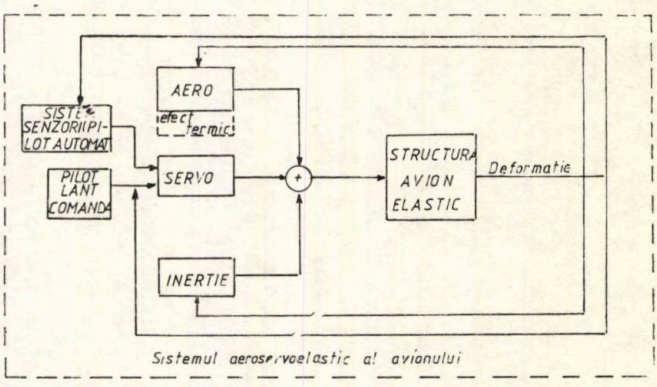


Fig. 1 — Schema bloc a principalilor factori ce trebuie considerați într-un calcul dinamic al unei suprafețe portante

* Ing., Institutul de aviație, București

vederea analizei dinamice. Pe lîngă interacțiunea forțelor elastice, aerodinamice și inerțiale considerate de regulă în calculul dinamic, vor fi analizate în acest capitol și influențele forțelor servoelastice ce apar într-un sistem automat de comandă și stabilitate servoasistat. Analiza dinamică considerată privește în mod special stabilitatea dinamică și influența comenzilor servoasistate asupra vitezei critice de flutter.

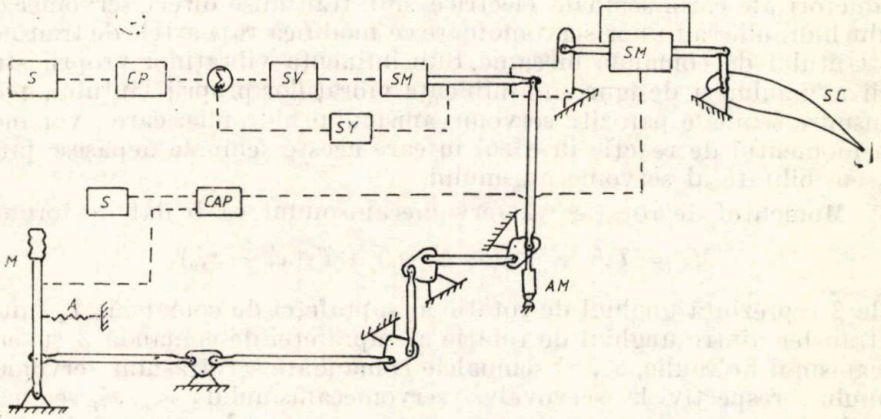


Fig. 2 — Schema de conexiuni a unui sistem automat de comandă și stabilitate
M — manșă, A — arc, AM — amortizor, S — sistem de senzori, CP — circuit de prelucrare a semnalului, Σ — sumator, SV — servoamplificator final, SM — servomotor, SY — sincronizator, SM — servomecanism hidraulic, CAP — calculator, autopilot, SC — suprafață de comandă

O prezentare teoretică generală a influenței comenzilor servoasistate asupra vitezei critice de flutter, împreună cu modelarea matematică a fenomenului este făcută în [1]. Modelarea este bazată pe analiza modală a structurii elastice. Acest mod de abordare a problemei, utilizat și în articolul de față, prezintă o serie de avantaje prin faptul că determinarea teoretică a modurilor de vibrație ale structurii se face încă din faza de proiectare a unei aeronave, urmînd ca acestea să fie verificate experimental odată cu realizarea prototipului.

De asemenea, atît calculul cît și experimentările de determinare a vitezei critice de flutter se bazează pe analiza modală a structurii. Se realizează astfel o abordare unitară a răspunsului dinamic al structurii unei aeronave, bazată pe analiza modală.

Ținînd cont de aceste observații vor fi prezentate în continuare principalele caracteristici dinamice ale unui lanț de comenzi prevăzute cu sistem automat de control și cu suprafețe de comandă servoasistate de tipul celui reprezentat schematic în fig. 2, pe baza analizei modale și a determinărilor de impedanță.

Pentru o mai bună prezentare a acestor caracteristici s-a considerat utilă analiza a trei zone semnificative : lanțul de comenzi manșă (palonier) — -servomecanism ; servomecanismul hidraulic ; servomecanism-suprafață de comandă. Aceste caracteristici au fost determinate în cadrul unor cercetări teoretice și experimentale efectuate de autor în [2, 3, 4, 5].

2. Considerații privind lanțul de comenzi manșa/palonier — servomecanism hidraulic

Lanțul de comandă al unei suprafețe de control, reprezentat schematic în fig. 2 este realizat de regulă dintr-o succesiune de tije, cabluri, leviere ce realizează transmiterea mecanică a semnalului de la manșă/palonier la servomecanismul hidraulic și o succesiune de traductori ale căror semnale electrice sînt transmise direct servomecanismului hidraulic sau unor servomotoare ce modifică rapoartele de transmisie ale lanțului de comandă mecanic. Sub influența vibrațiilor proprii structurii avionului și desigur sub influența vibrațiilor proprii lanțului, pot fi transmise semnale parazite servomecanismului hidraulic, care-i vor modifica momentul de reacție în cazul în care aceste semnale depășesc pragul de sensibilitate al servomecanismului.

Momentul de rotație al servomecanismului va fi dat de formula:

$$M_s = T_s\beta + T_E(x_i + x_{ip}) + T'_E(x'_i + x'_{ip}) \tag{1}$$

unde β reprezintă unghiul de rotație al suprafeței de comandă, T_s funcția de transfer dintre unghiul de rotație al suprafeței de comandă β și servomecanismul hidraulic, x_j, x'_j semnalele comandate sertărașului servomecanismului, respectiv la servovalva servomecanismului; x_{ip}, x'_{ip} semnalele parazite corespunzătoare (diferența dintre semnalele comandate și cele realizate), fig. 3; T_E, T'_E reprezentînd funcțiile de transfer dintre semnalele de intrare și semnalele de ieșire. Mărimile x_{ip} și x'_{ip} vor determina stabilitatea sistemului avion cu comenzi automate acționate servohidraulic în zbor. Evaluarea teoretică sau experimentală a mărimii x'_{ip} definită de funcțiile de transfer ale traductorilor, circuitelor electronice și al servomotoarelor, de modurile de vibrație ale structurii și de alți factori va fi dificilă. Pe baza modurilor proprii de vibrații ale avionului (calculate sau determinate experimental) se poate acționa însă cu ușurință asupra acestei mărimi fie prin intermediul unor filtre electronice care să elimine de exemplu influența nedorită a unui mod propriu de vibrație al structurii, fie prin repoziționarea traductorilor pe structură.

Mărime x_{ip} poate fi dedusă din relația:

$$x_{ip} = \Sigma\, T_{qr}\, q_r + T_\beta \cdot \beta \tag{2}$$

unde q_r reprezintă coordonata generalizată a modului de vibrație r al structurii elastice a avionului (incluzînd lanțul de comandă elastic), T_{qr} reprezintă funcția de transfer modală, T_β reprezentînd funcția de transfer dintre mărimea de intrare x_i și unghiul de rotație al suprafeței de comandă β, fig. 3.

Sistemul mecanic al lanțului de comandă are o structură deosebită fiind un mecanism format din tije legate prin leviere la structura avionului care împreună cu un arc (simulatorul de sarcină) constituie elementul elastic și o serie de mecanisme reprezentînd cu aproximare foarte bună, în cadrul unei idealizări, mase concentrate. Acest sistem poate fi ușor modelat printr-o idealizare de element finit cu elemente unidimensionale. O astfel de analiză a fost efectuată cu ajutorul programului de element finit SAP-IV [2]. În urma determinării atente a gradelor de li-

bertate din fiecare nod (care definesc matricea $\{r\}$), a distribuției corespunzătoare a maselor în cadrul matricei de mase $[M]$, matricea de rigiditate $[K]$ este determinată de program. Rezultă frecvențele proprii

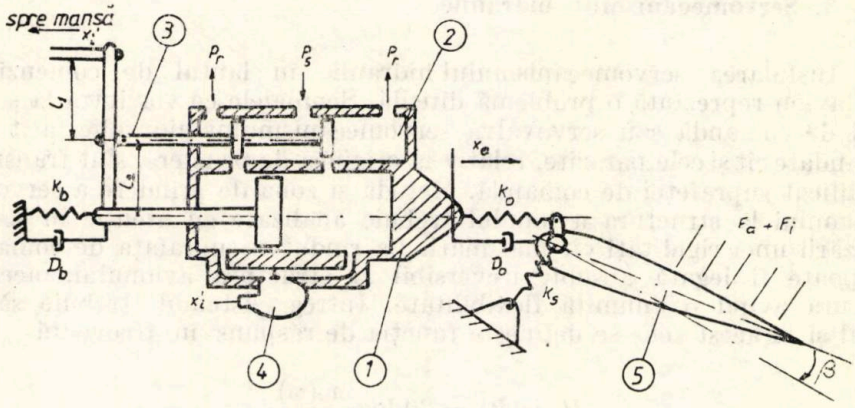


Fig. 3 — Modelarea zonei servomecanism — suprafață de comandă :1- corp servomecanism ; 2-sertărașul servomecanismului ; 3-pistonul sertărașului ; 4-servovalva : 5-suprafața de comandă ; k_b, k_0, D_b, D-rigiditățile respectiv amortizările prinderii servomecanismului la structura avionului și suprafeței de comandă ; k_s-rigiditatea de prindere a suprafeței portante la structură ; l_1, l_2 lungimi caracteristice cinematicii lanțului de acționare servomecanism ; x_i, x_e deplasări față de referință ; x_i' semnal electric servovalvă ; p_s, p_r presiuni de alimentare respectiv retur ; F_a, F_i forțele aerodinamice respectiv inerțiale.

împreună cu forma modală a modurilor determinate. Aceste valori permit calculul teoretic al funcției de transfer în frecvență a lanțului manșă/palonier — intrare servomecanism definită :

$$H_{ef}\,[\mathrm{d}B] = 20 \log \frac{x_m(\omega)}{x_i(\omega)} \quad \omega = 2\pi f \tag{3}$$

unde f reprezintă frecvența, x_m deplasarea la manșă la nivelul pumnului pilotului iar x_i intrarea la servomecanism.

Se poate deduce cu ușurință din ecuațiile (2), (3) că atît semnalele x_{ip} cît și x_{ip} vor fi maxime la excitări ale structurii cu forțe al căror conținut de frecvență va fi apropiat de cel al frecvențelor modurilor proprii de vibrație ale structurii avionului. Dintre aceste moduri, conform ecuației (2), cea mai mare pondere în definirea semnalului, x_{ip} o vor avea modurile proprii corespunzătoare lanțurilor de comenzi. Acestea vor fi excitate fie de forțele inerțiale ce apar în diversele evoluții ale avionului (zbor în atmosferă turbulentă, aterizare, rulare, etc.), fie de deplasările punctelor de prindere ale lanțului la structura avionului, datorate modurilor proprii de vibrație ale structurii. Din această cauză prezența unor moduri de vibrație ale lanțului de comenzi cu frecvențe proprii apropiate de cele ale modurilor proprii structurii avionului pot fi periculoase și trebuie evitate prin luarea de măsuri corespunzătoare încă din faza de proiectare (în

fig. 2 rolul amortizorului AM este de a diminua nivelul zgomotelor x_{ip} ce ar putea apare la intrarea servomecanismului).

3. Servomecanismul hidraulic

Instalarea servomecanismului hidraulic în lanţul de comenzi al unui avion reprezintă o problemă dificilă. Semnalele ce vor intra la sertăraşul de comandă sau servovalva servomecanismului hidraulic, atît cele comandate cît şi cele parazite, relativ la originea de prindere, sînt transmise amplificat suprafeţei de comandă. Metoda şi zona de prindere a servomecanismului la structura avionului trebuie analizate cu atenţie în scopul realizării unei rigidităţi cît mai mari. La rîndul ei suprafaţa de comandă nu poate fi legată absolut ireversibil la structura avionului, această legătură avînd o anumită flexibilitate. Întreg sistemul trebuie să fie stabil şi în acest sens se defineşte funcţia de răspuns în frecvenţă

$$H_b\,[\mathrm{d}B] = 20 \log \frac{x_i(\omega)}{x_s(\omega)} \tag{5}$$

similar cu funcţia de răspuns în frecvenţă definită în paragraful precedent.

În scopul determinării analitice a caracteristicilor dinamice ale servomecanismelor se poate realiza un model matematic liniarizat care să modeleze atît servomecanismul cît şi structura adiacentă şi suprafaţa de comandă, [4, 9]. Se poate determina astfel funcţia de răspuns în frecvenţă (5). O altă mărime ce se determină este impedanţa servomecanismului definită de raportul dintre deplasarea d produsă de o forţă F ce acţionează asupra suprafeţei de comandă/verinul de acţionare a servomecanismului şi forţa F necesară producerii acestei deplasări :

$$Z = \frac{F}{d} \tag{6a}$$

Deoarece o forţă tranzitorie poate fi reprezentată drept o sumă finită de forţe sinusoidale $F = \Sigma F_i$; $F_i = F_{oi}\, e^{i\omega t}$ (serie Fourier), impedanţa va fi definită în domeniul frecvenţelor pentru acţionări sinusoidale F_i şi deplasări (răspuns) $d_i = d_0 e^{i\omega t}$ dependente de frecvenţa forţei F_i. Această formulare prezintă avantajul unei definiri teoretice şi experimentale unitare a impedanţei. Pentru a pune în evidenţă defazajul existent între forţă şi deplasarea rezultantă, impedanţa se determină sub forma complexă :

$$Z(\omega) = Z_R(\omega) + iZ_I(\omega) \tag{6b}$$

unde Z_R va reprezenta caracteristica de rigiditate a servomecanismului iar Z_i va defini caracteristica de amortizare. Ambele mărimi, rigiditatea

și amortizarea sînt deosebit de importante în determinarea comportamentului aeroelastic al avionului. O valoare ridicată a rigidității va mări valoarea frecvenței proprii suprafeței de comandă scoțînd flutterul suprafeței de comandă (și eventual flutterul ternar) complet din anvelopa de zbor și micșorînd în același timp șansele apariției fenomenului de buzz. De asemenea, o valoare ridicată a amortizării va avea de regulă un efect favorabil asupra vitezei critice de flutter și în special asupra fenomenului de buzz.

Se subliniază faptul că z_i poate avea atît valori pozitive cît și valori negative. În fig. 4 este prezentată alura tipică a unei curbe teoretice de impedanță obținută printr-o modelare liniară de tipul celei amintite anterior. Ceea ce este de dorit este ca această curbă să fie deplasată cît mai spre dreapta și cu amortizare pozitivă cît mai mare de tipul celei prezentate în fig. 4b. Rezultă că determinarea impedanței, atît teoretic cît și experimental și modificarea ei corespunzătoare este deosebit de importantă în faza de proiectare și realizare a unei aeronave cu comenzi acționate servohidraulic, în special în scopul stabilirii comportamentului la flutter. Prin modificarea frecvenței proprii și a amortizării modului propriu suprafeței de comandă, poate fi crescută viteza critică de flutter. Valorile (5) și (6) vor fi verificate experimental pe modele funcționale in scopul evaluării efectelor neliniarităților și a ipotezelor utilizate pentru definirea modelului matematic.

4. Suprafața de comandă

Ultima zonă a lanțului de comandă al unei suprafețe de comandă este cuprinsă între legătura la verinul servomecanismului și respectiv suprafața de comandă. În scopul obținerii unei frecvențe proprii de rezonanță cît mai ridicate și această zonă trebuie realizată cît mai rigid (menținîndu-se greutatea la limitele minime admisibile) cu eliminarea pe cît posibil a efectelor jocurilor. Se utilizează în acest scop pentru construcția suprafețelor de comandă materiale și tehnologii noi; structuri compozite cu fibre de sticlă și carbon, structuri sandwich, etc.

Analiza comportamentului dinamic al suprafeței de comandă respective cu zona de prindere la structura avionului se poate face analitic cu ajutorul elementului finit, incluzînd în calcul și lanțul de comandă manșă/palonier servomecanism, [2]. Se poate evalua în acest fel și posibilitatea poziționării unor eventuale greutăți de echilibraj care să modifice frecvența și forma modală a unui mod critic al suprafeței de comandă, dacă acesta există. Se poate determina astfel funcția de transfer în frecvență pentru zona ieșire servomecanism — suprafață de comandă definită:

$$H_{sc}[\mathrm{d}B] = 20 \log \frac{x_i(\omega)}{\beta(\omega)} \tag{8}$$

notațiile fiind cele utilizate anterior. Valorile obținute vor fi verificate experimental în scopul stabilirii influențelor jocurilor și neliniarităților.

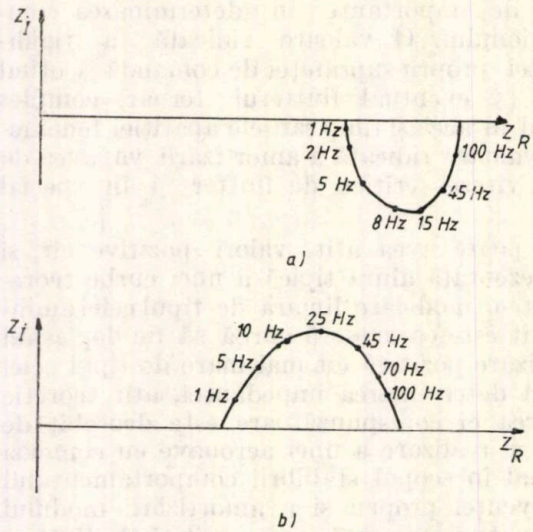


Fig. 4 — Forme tipice ale curbelor de impedanță ale unui servomecanism.

5. Concluzii

În articolul de față au fost analizate caracteristicile dinamice ale unui lanț de comenzi servoasistat al unui avion. S-au considerat două aspecte:

1. Rolul servomecanismului este de a amplifica orice semnal (mecanic sau electric) prezent la intrarea acestuia. În condițiile existenței lanțului mecanic manșă — intrare servomecanism (cu un număr infinit de frecvențe proprii de rezonanță ce pot fi excitate pe avion în zbor de către factorii externi) apar semnale parazite la intrarea servomecanismului. Analiza dinamică trebuie să asigure că aceste semnale parazite introduse nu sînt periculoase (este satisfăcută stabilitatea dinamică a sistemului). O apreciere calitativă și cantitativă a nivelului și naturii acestor semnale parazite este dată de funcțiile de transfer definite pentru zone ale lanțului conform relațiilor (4), (5) și (8). Aceste funcții de transfer pot fi determinate teoretic cu o bună acuratețe înaintea realizării lanțului de comandă, verificate experimental pe modele funcționale și luate măsuri corespunzătoare în cazul cînd apar abateri de la cerințele de funcționare. După realizarea lanțului de comandă și montarea acestuia pe avion sînt necesare verificări experimentale ale valorilor funcțiilor de transfer conform formulelor (4), (5) și (8) și a funcției de transfer globale:

$$H = H_{ef} + H_b + H_{sc}$$

astfel încît să nu apară vîrfuri de rezonanță periculoase sau fenomenul de autooscilație (am notat cu H funcția de transfer a lanțului de comandă complet de la manșă/palonier la suprafața de comandă).

Trebuie subliniat faptul că pentru lanțul de comandă manșă/palonier — intrare servomecanism, funcția de transfer în frecvență va indica vîrfuri semnificative corespunzătoare frecvențelor proprii acestui lanț. Existența unor amortizări mici la aceste frecvențe va determina apariția unor amplitudini mari pe lanț, inclusiv la intrarea în servomecanism. Aceste vîrfuri nu vor putea fi diminuate decît prin introducerea unor amortizări fie pe lanț, fie la intrarea în servomecanism prin proiectarea corespunzătoare a acestuia, astfel încît funcția de transfer globală să nu prezinte vîrfuri a căror amplitudine să depășească cerințele regulamentare.

2. Servomecanismul trebuie să realizeze „ireversibilitatea" comenzii. Existența unei amortizări negative, semnalate de curba de impedanță $Z(\omega)$ a servomecanismului, de tipul celei prezentate în fig. 4a

poate duce la apariția fenomenului de flutter în zbor sau chiar de autooscilații la sol. Din acest motiv este de dorit ca servomecanismul să fie astfel proiectat încît curba de impedanță să fie de tipul celei prezentate în fig. 4b, aceasta avînd de regulă un efect favorabil asupra vitezei critice de flutter și în special asupra fenomenului de buzz.

NOTA : În aeronautică se folosește de obicei termenul de impedanță în loc de obstructanță.

BIBLIOGRAFIE

1. *H. Forsching*, „Einfluss Servomechanischer Steuerungs-und Stabilitätsysteme auf das Flatterverhalten von Flugzeugen", Z. Flugwiss. 21 (1978), Heft 1.
2. *V. Giurgiuțiu, I. D. Teodorescu, E. Țurlea*, „Calculul vibrațiilor sistemelor de comenzi" lucrare INCREST, septembrie 1981.
3. *E. Țurlea*, „Determinarea experimentală a impedanței servomecanismului" lucrare INCREST, septembrie 1982.
4. *V. Giurgiuțiu, E. Țurlea, F. Ursu*, „Calculul caracteristicilor dinamice ale servomecanismului" lucrare INCREST, noiembrie 1980.
5. *E. Țurlea*, „Determinarea experimentală a caracteristicilor de vibrații ale lanțurilor de comenzi" lucrare INCREST, august 1984.
6. *P. Augustin*, „Calculul structurilor de aviație" Editura Tehnică, 1984.
7. *O. C. Zienkiewicz*, „The Finite Element Method in Engineering Science," Mc Graw Hill, London 1971.
8. *I. Ursu*, „Calculul dinamic al servomecanismului" raport INCREST 1980.

The Influence of Power Control Systems on the Dynamics of Lifting Surfaces

This paper presents an analysis method of the dynamic behaviour for a lifting surface with power control flying system, based on frequency response functions and power control impedance. Theoretical methods for the calculation of the two functions are presented, such that the results obtained can be easily interpreted and experimentally checked.

C.Z : 621.52:534

DIAGNOSTICAREA DEFECTELOR UTILAJELOR INDUSTRIALE FOLOSIND MĂSURĂRI DE VIBRAȚII

MINELA BADEA *

Măsurările de vibrații au evoluat de la sisteme și metode simple care permit evaluarea nivelului global al vibrației pînă la sisteme și tehnici mai sofisticate care ajută la diagnosticarea defectelor în fază incipientă și la determinarea vitezei de uzură și deteriorarea componentelor mașinii.

În acest articol, se arată metode de măsurare și analiză a vibrațiilor aplicate la întreținerea unei pompe de vid ce echipează un cuptor de tratamente termice, de la Întreprinderea Turbomecanica.

1. Introducere

Prin măsurări periodice de vibrații, s-a urmărit definirea nivelului maxim acceptabil, pentru care o pompă de vid tip ROOTS, model MAV 3000, ce echipează un cuptor de prelucrări termice în vid, funcționează bine. Analizînd spectrele de frecvență ale vibrațiilor s-a urmărit evoluția componentelor spectrale ale pompei putînd astfel prevedea și pregăti din timp reparațiile, încît să nu se producă o oprire forțată a mașinii datorită unor defecte majore, asigurîndu-se în acest mod reducerea timpilor de staționare și deci a cheltuielilor de producție. Eficiența alegerii parametrilor și procedurilor de măsurare și analiză a spectrului de vibrație, condiționează atingerea acestui obiectiv.

2. Descrierea instalației

Pompa de vid ROOTS, model MAV 3000, are rolul de a crea vid în interiorul unui cuptor pentru tratamente termice a pieselor componente ale motoarelor de avion. Ea este antrenată de un motor electric AEG, tip AM32, de 7,5 CP, cu 2 trepte de turații : 1460 rot/min și 2935 rot/min. Pompa de vid este cuplată la o pompă mecanică de difuzie, care asigură un vid preliminar în cuptor.

Schema simplificată a instalației este prezentată în figura 1 :

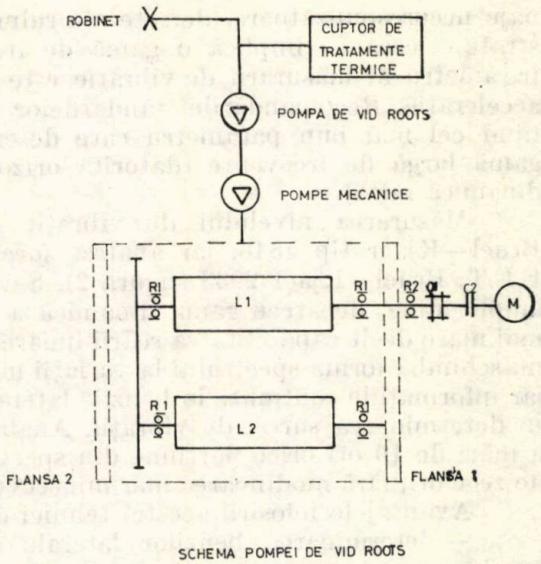
— Cuplajul elastic cu 6 bolțuri, C1, asigură cuplarea axului pompei la axul motorului electric de antrenare M.

* Ing., Întreprinderea Turbomecanica — București

— Cuplajul electromagnetic C2, asigură trecerea lentă de la turaţia 1460 rot/min la 2935 rot/min.

Măsurările de vibraţie s-au făcut pe flanşa 1, a pompei, în dreptul cuplajului dintre pompă şi motorul electric, pe 4 direcţii, (figura 3).

S-a urmărit comportarea rulmenţilor R1 pe care sînt sprijiniţi cei 2 lobi precum şi a angrenajelor de roţi dinţate. Atît starea de funcţionare a rulmenţilor, cît şi cea a roţilor dinţate este importantă, deoarece cea mai mică alunecare a angrenajului poate conduce imediat la ciocnirea lobilor între ei ceea ce ar antrena distrugerea pompei (greutatea unui lob este 80kg). S-a urmărit comportarea rulmenţilor R2 pe linia de cuplaj pompă-motor, ţinînd cont de caracteristicile lor geometrice.



SCHEMA POMPEI DE VID ROOTS
Fig. 1

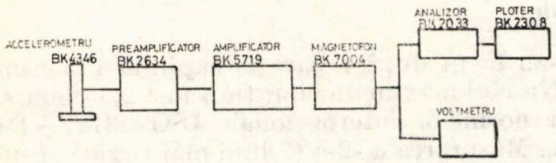


Fig. 2

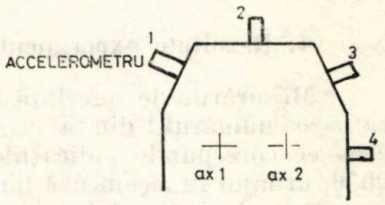


Fig. 3

3. Tehnica de măsurare şi analiză a vibraţiilor

Conceptul de control al stării utilajului se bazează pe compararea spectrului de vibraţii măsurat cu cele înregistrate anterior. Atît timp cît maşina funcţionează bine, nivelul vibraţiilor este aproximativ constant, iar spectrul de frecvenţă are o anumită formă. Atunci cînd apare un defect, nivelul vibraţiilor creşte, iar forma spectrului se schimbă. Măsurările de nivel global dau o indicaţie asupra gravităţii vibraţiilor, dar cauzele vibraţiilor mari se determină din spectrul de frecvenţă a măsurării. Prin măsurări de vibraţii la intervale fixe de timp şi compararea lor cu spectrul de referinţă (spectrul maşinii la punerea ei în funcţiune sau după o reparaţie capitală), orice modificare poate fi depistată, interpretată şi urmărită în timp.

Pentru o analiză corectă a spectrului de vibraţii trebuie ca toate frecvenţele asociate cu dezechilibre, dezaxări, transmisii incorecte, angre-

naje necorespunzătoare, defecte ale rulmenților, rezonanțe, să fie înregistrate — ceea ce implică o gamă de frecvență 100—10.000Hz. Un alt parametru al măsurării de vibrație este ce măsurăm : deplasare, viteză, accelerație. Recomandările standardelor internaționale definesc viteza ca fiind cel mai bun parametru care descrie severitatea vibrațiilor într-o gamă largă de frecvențe (datorită orizontalității spectrului, deci gamă dinamică mică).

Măsurarea nivelului de vibrații s-a făcut utilizînd traductoare Bruel—Kjaer tip 4346, iar analiza spectrului s-a făcut cu analizatorul F.F.T, Bruel—Kjaer 2033 (figura 2). S-a folosit scara logaritmică pentru amplitudine, deoarece gama dinamică a analizatorului F.F.T. este mult mai mare decît capabilitatea scării liniare ; de asemenea, scara logaritmică nu schimbă forma spectrului la variații mici ale procesului de funcționare, iar informațiile conținute în benzile laterale ale spectrului sînt importante în determinarea sursei de vibrații. Analizatorul 2033 are capacitatea de a mări de 10 ori orice porțiune din spectru (rezoluția în frecvență crește de zece ori, fără modificarea mărimii secvenței eșantionate).

Avantajele folosirii acestei tehnici de analiză sînt :

— determinarea benzilor laterale ale spectrului de frecvență în jurul unui vîrf predominant (corespunzătoare unei modulații în frecvență ; benzile laterale sînt caracteristice spectrelor roților dințate rulmenților).

— determinarea frecvenței fundamentale pentru angrenaje de roți dințate în cazul în care spectrul de vibrații conține multe armonici.

— determinarea exactă a frecvenței de rotație a mașinii.

4. Rezultate experimentale

Măsurările de referință s-au făcut după reparația capitală 1 (măsurătoarea numărul 1 din tabel). Nivelul maxim de vibrație a fost 2,55 mm/s, ceea ce corespunde indicațiilor normelor internaționale ISO 2372, VDI 2056, utilajul funcționează bine. Măsurarea a -2-a (3 luni mai tîrziu) arată creșterea nivelului global al vibrației în punctele 1 și 3 și în special 4. Analiza spectrală arată o creștere mare a amplitudinii fundamentalei (de 2—3 ori pentru punctul 4). Măsurările făcute 3 săptămîni mai tîrziu arată tot un nivel de vibrație ridicat în special pentru punctul 4. Măsurarea a 4-a făcută la 5 luni dela prima măsurare indică o creștere a nivelului vibrației de 5 ori față de nivelul punerii în funcțiune ; în timpul lucrului, se puteau auzi zgomote normale, bătăi. Analiza în frecvență a arătat creșterea amplitudinii fundamentalei de aproximativ 5 ori față de referință și apariția unei serii de benzi laterale (în număr de 6) corespunzătoare unei modulații cu frecvența 4,25 Hz (figura 4, 5, 6). S-a propus oprirea pompei și investigarea ei.

5. Interpretarea rezultatelor experimentale

Amplitudinile mari ale fundamentalei au indicat o dezaxare a axului motor-pompă și a elementelor așezate pe ax, iar banda laterală în jurul frecvenței de rotație a indicat un angrenaj cu defecte (numărul benzilor laterale=numărul bolțurilor de prindere a cuplajului elastic). Amplitu-

Fișa de măsurători
Pompa de vid ROOTS, MAV 3000

MAS. nr	Luna	V1(mm/s)	V2(mm/s)	V3(mm/s)	V4(mm/s)
1	4.0	1.50	2.55	1.70	1.20
2	7.0	5.00	2.40	4.20	7.20
3	8.0	4.50	2.85	5.10	7.40
4	9.0	4.20	0.00	5.10	8.40
5	9.5	3.00	1.20	1.35	3.30
6	10.0	2.85	1.20	2.10	3.90
7	11.0	1.05	0.75	0.90	1.80

Fig. 4a — Vibrații — nivel global

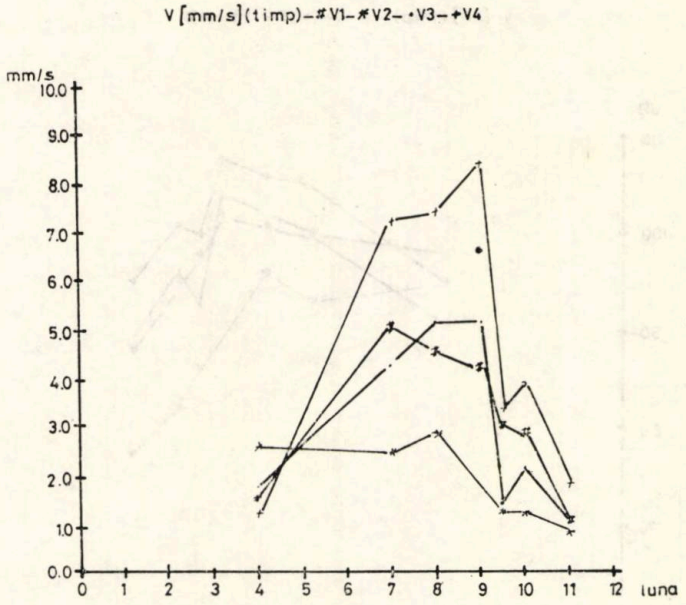


Fig. 4

dinile frecvențelor de impact ale rulmenților nu au prezentat creșteri semnificative, dar la demontare s-a propus și o inspectare a lor.

La demontarea pompei de vid s-au găsit următoarele :

— axul pompei curbat ; datorită dezaxării, se putea vedea urma unei frecări pe o adîncime de 0.1 mm. Jocul mecanic a crescut la 0.25 mm față de 0.05 mm inițial inelele interioare ale rulmenților de pe ax s-au găsit uzate.

Fişa de măsurători
Pompa de vid ROOTS°MAV 3000

MAS. nr	Luna	V1(dB)	V2(dB)	V3(dB)	V4(dB)
1	4.0	91	95	98	95
2	7.0	100	93	100	105
3	8.0	101	96	102	106
4	9.0	102	60	104	108
5	9.5	98	86	92	100
6	10.0	95	82	96	101
7	11.0	88	77	89	95

Fig. 5a — Vibraţii — armonica nr. 1

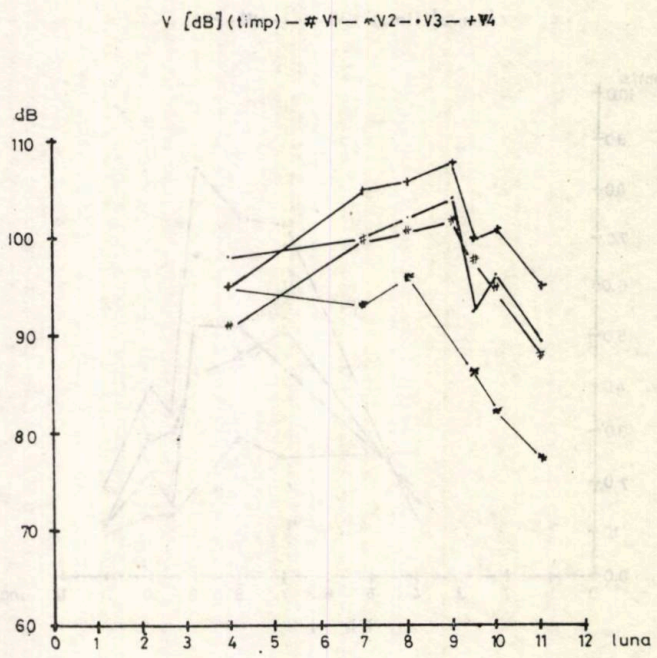


Fig. 5

— datorită creşterii jocului lateral, lobii pompei s-au lovit între ei, urma loviturilor fiind vizibilă.

După remontarea pompei, centrîndu-se corespunzător cei doi lobi şi cuplajul motor-pompă, nivelul vibraţiilor a scăzut semnificativ (maxim 3.3 mm/s, măsurarea numărul 5).

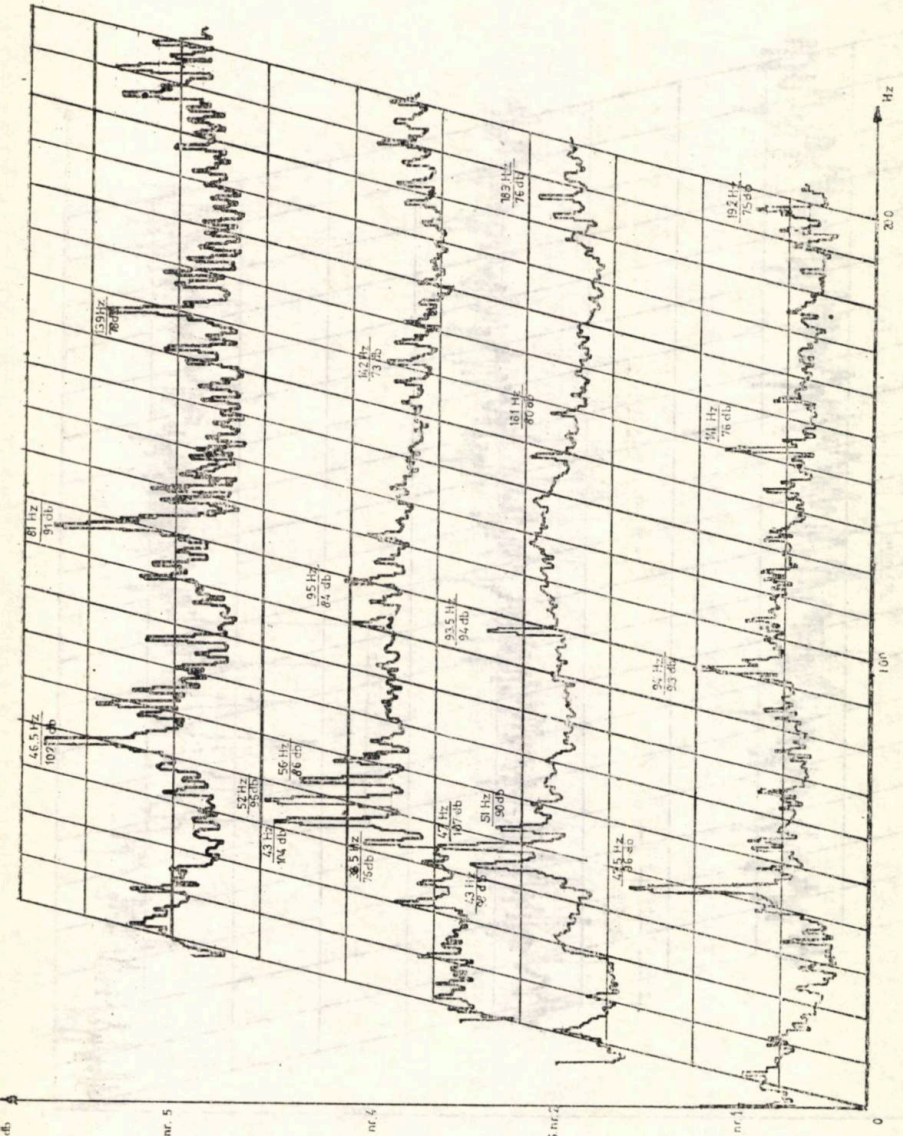

db
MAS. nr. 5
MAS. nr. 4
MAS. nr. 2
MAS. nr. 1
0
100
200
Hz
46.5 Hz
102 db
81 Hz
91 db
139 Hz
78 db
52 Hz
95 db
56 Hz
86 db
43 Hz
104 db
38.5 Hz
76 db
95 Hz
84 db
142 Hz
73 db
47 Hz
107 db
51 Hz
90 db
43 Hz
98 db
93.5 Hz
94 db
181 Hz
80 db
183 Hz
76 db
47.5 Hz
86 db
94 Hz
93 db
141 Hz
76 db
192 Hz
75 db

Fig. 6 a

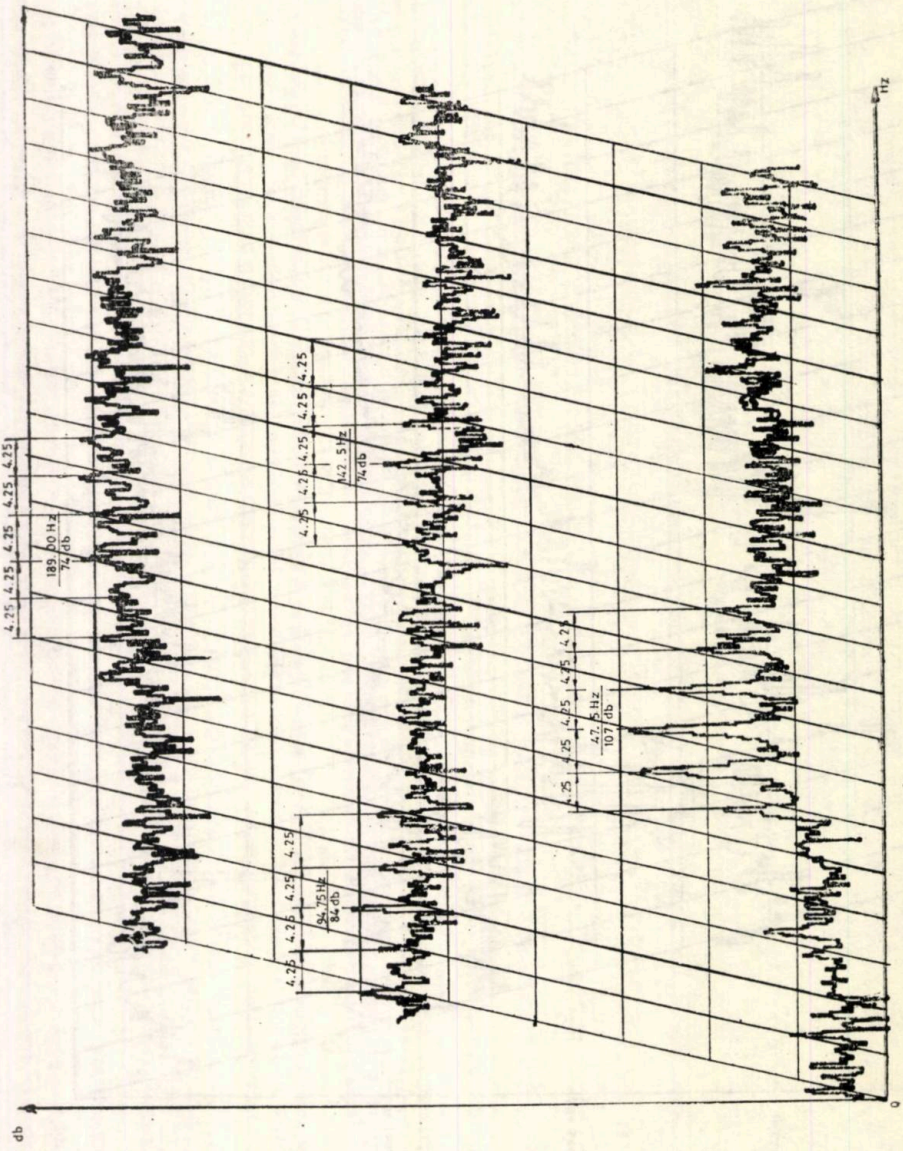

db
Hz
0
4.25 4.25 4.25 4.25 4.25
189.00 Hz
74 db
4.25 4.25 4.25 4.25 4.25
142.5 Hz
74 db
4.25 4.25 4.25 4.25 4.25
94.75 Hz
84 db
4.25 4.25 4.25 4.25 4.25
47.5 Hz
107 db

Fig. 6 b

Din măsurările efectuate, s-a decis ca nivelul maxim al vibrației, pentru care pompa de vid funcționează bine, este 4,5 mm/s (în conformitate cu standardele internaționale VDI2056, ISO 2372). Nivelul de alarmă maxim s-a decis a fi 7 mm/s, cînd trebuie luate măsuri pentru demontarea și repararea pompei.

Intervalul dintre două măsurări s-a propus a fi 4—5 săptămîni, sau 350—400 ore de funcționare.

6. Concluzii

Verificările periodice ale spectrelor de vibrație pot furniza informații valoroase asupra funcționării utilajelor industriale. Folosind un echipament și o tehnică de măsurare uzuală, este relativ ușor ca analiza vibrațiilor să devină o procedură de rutină în activitatea de întreținere și reparare a utilajelor industriale, asigurînd astfel folosirea lor eficientă și cu cheltuieli minime.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Radeș*, Vibrații mecanice, Ed. Tehnică, 1979.
2. *Bruel-Kjaer*, Machine Health Conditioning Monitoring, 1984.
3. *Bruel-Kjaer*, Mechanical Shocks and Vibrations, 1981.

Faults' Diagnosis of Industrial Machinery Using Vibration Measurements

Vibration measurements have developed from simple systems and methods that allow monitoring of overall vibration levels to more sophisticated systems and techniques that help to diagnosis the faults in early stage and to determine the wear rate of the components of the machinery.

This paper presents vibration measure and analysis methods applied in maintenance of a vacuum pump which operates with a thermic treatment furnace, at TURBOMECANICA, Bucharest.

BOOKS

Augustin P., CALCULUL STRUCTURILOR DE AVIAȚIE/Analysis of Flight Structure, Edit. Tehnică, București, 1984, 365 p., 39 lei.

The book presents the classical and the modern method to solve the stress-strain problems and design of the aeronautical structures.

The book begins with the general loads problems on aircraft faced with human tolerans ces, stress-strain problems using the theory of elasticity, followed by elastic stability problem- i.e. the straight bars buckling, the buckling of curved bars, of bars systems, buckling of the thin waled cross section bars, the buckling of the plates, of the curved plates and shells, the post-buckling behaviour.

This classic part is ended by a chapter about optimum problems solved in the clasiscal way. The modern part starts with matrix methods in structural analysis, followed by the finite elements method and ends by structural synthesis and optimisation.

The book is made for enginneers, scientists and designers working in aeronautics, as well as for engineers which intend to use the aeronautical design methods, in other field of applied mechanical engineering than aeronautics. The book is made also for professors and students working in aeronautics.

Aron, I., APARATE DE BORD PENTRU AERONAVE/Board Instrumentation for Airships Editura Tehnică, București, 1984, 503 p.

The functional principles, aircraft instrumentation theory and design for propulsion systems ,as well as for piloting and air navigation are thoroughly described in this work. A particular attention is given to gyroscopes and aeronautics autonomous systems.

Contents : Aircraft instrumentation elements. Board temperatures measurement. Board speed measurement. Apparatus and systems for measuring the fuel volume and discharge Flight altitude measurement. Flight speed measurement. Vertical speed measurement. Aerodynamic stations. Flight direction determination. Gyroscope theory concepts. Speed and integrator gyroscopes. Vertical positional gyroscopes. Directional gyroscopes. Flight direction measurement systems. Gyroscopic stabilization principles. Air navigation aerodynamic and Doppler methods. Inertial aeronautics. Air navigation complex systems. Flight directional systems.

Carafoli, E., Constantinescu, N. V. : DINAMICA FLUIDELOR COMPRESIBILE/Dynamics of Compressible Fluids, Editura Academiei R.S.R., București, 1984, 888 p.

This volume is a continuation of another one published in 1981 and called „Dynamics of Incompressible Fluids". The presents book deals with the study of frictionless compressible fluid ; the main application taken into account are those of great speed aerodynamics and gas dynamics.

The first part (ch. 1—4) presents the general properties of compressible fluids motion.

The second part (ch. 5—9) treats about the one-domensional flows and the theory of plane shock waves. Then, chapters 10—14 present the bi-and tridimensional subsonic flow, while chapters 15—24 describe the supersonic fllow and chapters 25—27 — the transonic flow. A few details about the hypersonic motion are given in chapter 28 and, in the last ones, several additional topics connected to gas dynamics and aerodynamics are presented.

Popa, A. : LOCOMOTIVE ȘI AUTOMOTOARE CU MOTOARE TERMICE/Heat Engine Locomotives and Rail-Cars, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984, 582 p.

Contents : 1. General features of heat engine railway vehicles ; 2. Calculus of the main parameters of heat engine railway vehicles ; 3. Adherence between wheels and rails ; 4. Traction of heat engine vehicles ; 5. Determination of heat engine parameters ; 6. Heat engine traction railway vehicles gears ; 7. Mechanical gears on railway traction vehicles ; 8. Characteristics of mechanical gear — and heat engine railway traction vehicles 9. Hydraulic gears on railway traction vehicles ; 10. Hydraulic gears working liquids characteristics ; 11. Determina-

tion of hydraulic transformers ; 12. Performance of hydraulic transformers 13 Determination of hydraulic clutches ; 14. Performance of hydraulic clutches ; 15. Determination of hydraulic gears on traction vehicles ; 16. Electrical gears on heat engine railway traction vehicles ; 17. Determination of continuous current electrical gears ; 18. Determination of alternating — continuous current electrical gears ; 19. Determination of alternating current electrical gears ; 20. Drive and adjustment of heat engine vehicles.

Niţă, M., Moraru, V., Patraulea, N. : AVIOANE ŞI RACHETE/Airplanes and Rockets Editura Militară, Bucureşti, 1985, 301 p.

The book presents the general configuration of airships — supersonic airplanes and rockets, transport and emergency airplanes — as well as methods to estimate the main aerodynamic characteristics for adopting the most suitable solutions of design and performances.

Contents : 1. General dimension of an airship ; 2. Estimation of airships mass ; 3. Aerodynamic characteristics of wings and empennage ; 4. Aerodynamic characteristics of fuselage ; 5. Determination of airships aerodynamic characteristics.

TEZE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN 1984—1985

Crișan Violeti — Contribuții la sinteza mecanismelor aplicate la automatizarea montării armăturilor. (10.V.1984).

Dumitru Aurel Popa-Contribuții la prefecționarea activității stațiilor de triaj prin mecanizare complexă și automatizare. (28.VI.1984)

Cristian Ion Popescu — Contribuții la studiul zgomotului în semiconductori. (26.XII.1984)

Virgil Stanciu — Studiul teoretic și experimental al rețelelor de palete din treapta compresorului axial supersonic. Aplicații analoge hidraulice. (29.III.1985)

Mihai Marcu — Contribuții la utilizarea curentului alternativ la transmisia locomotivelor cu motoare termice. (9.X.1985)

Gheorghe Bucșă — Influența abaterilor geometrice asupra caracteristicilor statice și dinamice ale lagărelor cu gaze (28.X.1985)

I. P. Informația c. 1711

40.430